МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ФИГУРЕ ОТ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»;
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»;
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»;
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»;
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»;
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»;
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция
и охрана воздушного бассейна»;
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»
и 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области строительства и архитектуры

Минск
БНТУ
2020

УДК 517.38(075.8)
ББК 22.161.6(075.8)
О-60

С о с т а в и т е л и:
Т. Н. Гурина, А. В. Капусто, Л. А. Яблонская

Р е ц е н з е н т ы:
профессор кафедры высшей математики
Белорусского государственного экономического университета,
доктор физ.-мат. наук *А. И. Астровский*;
зав. кафедрой высшей математики
Белорусского государственного экономического университета,
доктор физ.-мат. наук *М. П. Дымков*

О-60 **Определенный** интеграл по фигуре от скалярной функции. Практическая часть : пособие для студентов специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»; 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»; 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»; 1-70 03 01 «Автомобильные дороги»; 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»; 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»; 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»; 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов» и 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций» / сост.: Т. Н. Гурина, А. В. Капусто, Л. А. Яблонская. – Минск: БНТУ, 2020. – 91 с.

ISBN 978-985-550-981-4.

Пособие является продолжением методического пособия «Определенный интеграл по фигуре от скалярной функции». Разобраны задания для аудиторной работы, предложены задания для самостоятельной работы, а также большое количество примеров прикладного характера, часть из которых может быть использована для организации учебно-исследовательской работы студентов. В пособии разобраны базовые задачи по данному разделу, которые составляют экзаменационный минимум.

УДК 517.38(075.8)
ББК 22.161.6(075.8)

ISBN 978-985-550-981-4

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие № 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть на плоскости дуга AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;b]$. Будем предполагать, что $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны на $[a;b]$. В этом случае $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$, тогда

$$\int\limits_{(\cup AB)} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \tag{1.1}$$

2. Пусть на плоскости дуга AB задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$.

Будем считать $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывными на $[\alpha;\beta]$ и $x'(t) > 0$. В этом случае $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$, тогда

$$\int\limits_{(\cup AB)} f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{1.2}$$

3. Пусть пространственная дуга AB задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$.

В этом случае $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$ и

$$\int\limits_{(\cup AB)} f(x,y,z)dl =$$

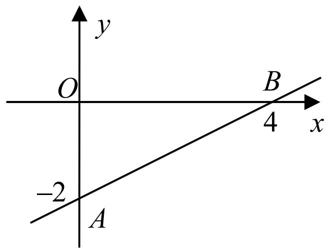
$$= \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt. \tag{1.3}$$

Задачи для решения в аудитории

Задача 1.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, если L – отрезок прямой между точками $A(0;-2)$ и $B(4;0)$.

Решение. Напишем уравнение прямой AB в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$:

$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow \; y=\frac{x}{2}-2; \;\; x\in[0;4].$



Так как $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$ то

$y'=\left(\frac{x}{2}-2\right)'=\frac{1}{2}; \quad dl=\frac{\sqrt{5}}{2}dx.$

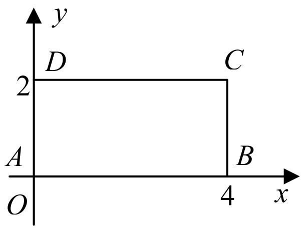
Тогда

$$\int\limits_L \frac{dl}{x-y}=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{dx}{x-\left(\frac{x}{2}-2\right)}=\sqrt{5}\int\limits_0^4\frac{dx}{x+4}=\sqrt{5}\left(\ln 8-\ln 4\right)=\sqrt{5}\ln 2.$$

Ответ: $\sqrt{5}\ln 2.$

Задача 1.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xydl,$ где L – контур прямоугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(0;2)$.

Решение. $I=\int\limits_L xydl=\int\limits_{AB} xydl+\int\limits_{BC} xydl+\;+\int\limits_{CD} xydl+\int\limits_{DA} xydl.$



Запишем уравнения сторон прямоугольника:

$AB: y=0;\; 0\le x\le 4;\; dl=dx;$

$BC: x=4;\; 0\le y\le 2;\; dl=dy;$

$CD: y=2;\; 0\le x\le 4;\; dl=dx;$

$DA: x=0;\; 0\le y\le 2;\; dl=dy.$

Тогда

$$\int\limits_{AB} xydl = \int\limits_0^4 x \cdot 0dx = 0; \int\limits_{BC} xydl = \int\limits_0^2 4 \cdot ydy = 2y^2 \Big|_0^2 = 8;$$

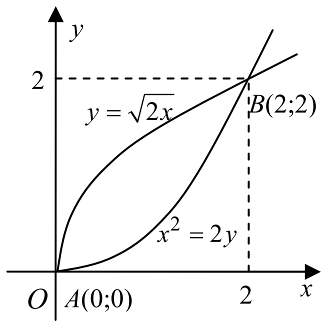
$$\int\limits_{CD} xydl = \int\limits_0^4 x \cdot 2dx = x^2 \Big|_0^4 = 16; \int\limits_{DA} xydl = \int\limits_0^2 0 \cdot ydy = 0.$$

Следовательно, $I = \int\limits_L xydl = 0 + 8 + 16 + 0 = 24.$

Ответ: $I = 24.$

Задача 1.3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L ydl,$ где L – дуга параболы $y^2 = 2x,$ отсеченная параболой $x^2 = 2y.$

Решение. Точки A и B – точки пересечения парабол, которые находим из системы уравнений $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = 2y \end{cases}$: $A(0;0),$ $B(2;2).$



Дуга L – это дуга AB, определяемая уравнением $y = \sqrt{2x},$ $0 \le x \le 2;$

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx; \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}};$$

$$dl = \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx.$$

Тогда

$$\int\limits_L ydl = \int\limits_0^2 \sqrt{2x} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx = \int\limits_0^2 \sqrt{1+2x}dx = \frac{1}{3}(1+2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$

Задача 1.4. Найти длину дуги линии $y=\ln\left(1-x^2\right),\ \ x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right].$

Решение. Длина дуги линии вычисляется по формуле $l=\int\limits_L dl.$

Вычислим $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx;\ \ y'=\dfrac{2x}{1-x^2};\ dl=\sqrt{1+\dfrac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}dx=\ =\dfrac{1+x^2}{1-x^2}dx.$

Тогда

$$l=\int\limits_L dl=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=-\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{x^2-1}\right)dx=-\left(x-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $l=\ln 3-\dfrac{1}{2}$ (ед. длины).

Задача 1.5. Найти массу участка цепной линии $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между точками с абсциссами $x_1=0,\ \ x_2=a,$ если в каждой точке плотность обратно пропорциональна ординате этой точки.

Решение. По условию, плотность

$$\gamma\left(x,y\right)=\frac{k}{y}=\frac{2k}{a}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}},$$

где $k=\text{const}$ – коэффициент пропорциональности.

Масса плоской кривой вычисляется по формуле $m=\int\limits_L\gamma\left(x,y\right)dl.$

Так как $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$ то $y'=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-\dfrac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right);$

$$dl=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$$

Тогда

$$m=\int_L \gamma(x,y)dl=\int_0^a \frac{2k}{a}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{k}{a}\int_0^a dx=\frac{k}{a}x\Big|_0^a=k.$$

Ответ: $m=k$ (ед. массы).

Задача 1.6. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int_L y^2dl,$ где L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

Решение. Кривая задана параметрически, поэтому $dl=$ $=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$. Вычислим dl: $x'=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$; $dl=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$

Тогда

$$\int_L y^2dl=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\, 2a\sin\frac{t}{2}dt=2a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=\left|\begin{array}{l} u=\cos\frac{t}{2},\ \ du=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt \\ 1\le u\le -1 \end{array}\right|=$$

$$=-16a^3\int_1^{-1}\left(1-u^2\right)^2du=\frac{256a^3}{15}.$$

Ответ: $I=\dfrac{256a^3}{15}.$

Задача 1.7. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int_L (x+z)dl,$ где L – дуга кривой $x=t,$ $y=\frac{3}{\sqrt{2}}t^2,$ $z=t^3,$ $t\in[0;1]$.

Решение. $dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$

Вычислим dl: $x'=1,\ \ y'=\dfrac{6t}{\sqrt{2}},\ \ z'=3t^2,\ \ dl=\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt.$

Тогда

$$\int\limits_L(x+z)\,dl=\int\limits_0^1\left(t+t^3\right)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt=$$

$$=\frac{1}{36}\int\limits_0^1\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,d\left(1+18t^2+9t^4\right)=$$

$$\frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}\left(1+18t^2+9t^4\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{56\sqrt{7}-1}{54}.$$

Ответ: $I=\dfrac{56\sqrt{7}-1}{54}.$

Задача 1.8. Найти массу первого витка конической винтовой линии $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ t\in\left[0;2\pi\right],$ если плотность ее в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

Решение. По условию плотность $\gamma\left(x,y,z\right)=kz,$ где $k=\text{const}$ – коэффициент пропорциональности. Масса кривой вычисляется по формуле $m=\int\limits_L\gamma\left(x,y,z\right)dl.$ Найдем dl: $dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=$

$$=\sqrt{\left(\cos t-t\sin t\right)^2+\left(\sin t+t\cos t\right)^2+1}\,dt=\sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Тогда

$$m=\int\limits_L kz\,dl=\int\limits_0^{2\pi}kt\sqrt{2+t^2}\,dt=\frac{k}{3}\sqrt{\left(2+t^2\right)^3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2\sqrt{2}k}{3}\left(\sqrt{\left(1+2\pi^2\right)^3}-1\right).$$

Ответ: $m=\dfrac{2\sqrt{2}k}{3}\left(\sqrt{\left(1+2\pi^2\right)^3}-1\right)$ (ед. массы).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.9. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, если L – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

Ответ: $I=\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$.

Задача 1.10. Найти длину дуги кривой $y^2=x^3$ от $x=0$ до $x=1$ $(y\geq 0)$.

Ответ: $l=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$ (ед. длины).

Задача 1.11. Вывести формулу для вычисления интеграла $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ в полярных координатах, если линия L задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\leq\varphi\leq\varphi_2$.

Задача 1.12. Найти массу всей кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$, если плотность в каждой точке равна $\gamma(\rho,\varphi)=2\sqrt{\rho}$.

Ответ: $m=4\pi a\sqrt{2a}$ (ед. массы).

Задача 1.13. Найти массу дуги циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ между точками $A(0;0)$ и $B(2\pi a;0)$, если плотность в каждой точке равна сумме абсциссы и ординаты этой точки.

Ответ: $m=\frac{8a^2(3\pi+4)}{3}$ (ед. массы).

Задача 1.14. Найти массу участка кривой $y=\ln x$ от точки с абсциссой $x_1=\sqrt{3}$ до точки с абсциссой $x_2=2\sqrt{2}$, если плотность в каждой точке кривой равна квадрату абсциссы этой точки.

Ответ: $m = \dfrac{19}{3}$ (ед. массы).

Задача 1.15. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dl$,

где L – первый виток винтовой линии, $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a, b \ – \\ z = bt, \end{cases}$

некоторые постоянные.

Ответ: $I = 2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}$.

Задача 1.16. Найти массу дуги конической винтовой линии

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t \end{cases}$$

от точки, соответствующей $t = 0$, до точки, соответствующей $t = \dfrac{\pi}{2}$,

если плотность дуги $\gamma\left(x, y, z\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Ответ: $m = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}}$ (ед. массы).

Задача 1.17. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{t^4}{4}, \\ y = \dfrac{t^6}{6} \end{cases}$$

между точками пересечения ее с осями координат.

Ответ: $l=\dfrac{13}{3}.$

Задача 1.18*. Найти массу дуги *AB* кривой $3y=2x\sqrt{x},$ если плотность в каждой точке *M* пропорциональна длине дуги *AM*, $A(0;0),B\left(4;\dfrac{16}{3}\right).$

Ответ: $m=\dfrac{4k}{9}\left(63-5\sqrt{5}\right)$ (ед. массы), где k – коэффициент пропорциональности.

Задача 1.19*. Найти массу участка цепной линии $y=ach\dfrac{x}{a}$ между точками $x=0$ и $x=a,$ если плотность кривой в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки.

Ответ: $m=k$ (ед. массы), где k – коэффициент пропорциональности.

Задача 1.20*. Найти притяжение, оказываемое дугой астроиды $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,$ лежащей в первом квадранте, на единицу массы, помещенную в начале координат (точка M_0), если плотность кривой в каждой ее точке равна кубу расстояния этой точки от начала координат.

Примечание. Притяжение материальной точки материальною кривою – это сила $\overline{F},$ проекции которой на координатные оси $\overline{F_x}$ и $\overline{F_y}$ определяются по формулам $\overline{F_x}=m_0\int\limits_L\dfrac{\gamma(x,y)\cos\theta}{r^2}dl,$ $\overline{F_y}=m_0\int\limits_L\dfrac{\gamma(x,y)\sin\theta}{r^2}dl,$ где m_0 – масса данной точки; r – расстояние от данной точки M_0 до любой точки M на дуге, то есть длина вектора $\overline{M_0M};$ θ – угол между вектором $\overline{M_0M}$ и осью *Ox*.

Ответ: $\overline{F} = \frac{3a^2}{5}\overline{i} + \frac{3a^2}{5}\overline{j}.$

Задача 1.21*. Найти притяжение, оказываемое однородной полуокружностью радиуса R плотностью γ на единицу массы, помещенную в центре.

Примечание. Полуокружность радиуса R рассмотреть в системе координат, где центр полуокружности совпадает с началом координат.

Ответ: $\overline{F} = \frac{2\gamma}{R}\overline{j}.$

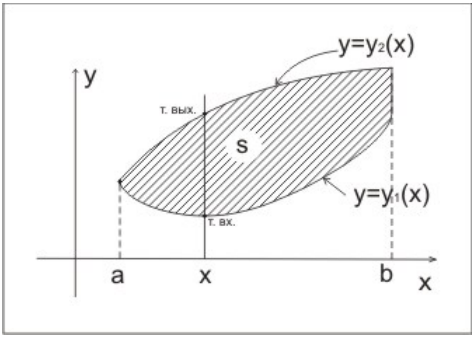
Задача 1.22*. Найти притяжение, оказываемое бесконечной однородной прямой плотностью γ на точку единичной массы, лежащую на расстоянии h от прямой.

Примечание. Саму прямую принять за ось Ox, а ось Oy провести через данную точку.

Ответ: $\overline{F} = -\frac{2\gamma}{h}\overline{j}.$

Практическое задание № 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА (ДИ) В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

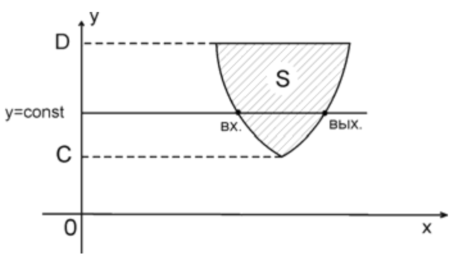


Плоская область S, лежащая в плоскости xOy называется *правильной в направлении оси Оу*, если любая прямая, параллельная оси Oy и проходящая через внутренние точки области S, пересекает ее границу не более чем в двух точках.

Пусть область S ограничена непрерывными линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $a \le x \le b$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$, $\forall x \in [a;b]$ и отрезками $x = a$, $x = b$. Линия $y = y_1(x)$ – линия входа, $y = y_2(x)$ – линия выхода

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Если область интегрирования S является правильной в направлении оси Ox, то есть любая прямая, проходящая через внутренние точки области, параллельно оси Ox, пересекает ее границу не более, чем в двух точках. Например, область S ограничена линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y \in [c;d]$, причем $x_1(y) \le x_2(y)$, $\forall y \in [c;d]$.



В этом случае сведение двойного интеграла к повторному имеет вид: $\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$

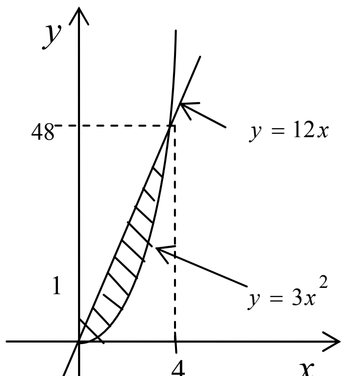
Замечание 1. Если область интегрирования S не является правильной в направлении обеих осей координат, то ее разбивают на сумму правильных областей, и представляют интеграл в виде суммы интегралов по этим областям.

Замечание 2. Если для линии входа или выхода не существует единого аналитического задания, то используя свойства ОИФ, следует разбить область S на сумму областей S_i, $i=\overline{1,k}$ прямыми, параллельными проектирующим прямым и проходящим через точки пересечении линий входа и выхода. Следовательно, интеграл по области S будет равен сумме интегралов по составляющим областям.

Задачи для решения в аудитории

Задача 2.1. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f\left(x,y\right)dxdy$ по заданной области $S: y=12x, y=3x^2.$

Решение. Построим область интегрирования S. Она является правильной в направлении обеих осей. В направлении оси Oy: $y=3x^2$ – линия входа, $y=12x$ – линия выхода. Проекцией области S на ось Ox является отрезок $\left[0;4\right]$.



Тогда ДИ сводится к повторному:

$$\iint\limits_S f\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f\left(x,y\right)dy.$$

В направлении оси Ox: $x=\dfrac{y}{12}$ – линия входа, $x=\sqrt{\dfrac{y}{3}}$ – линия выхода.

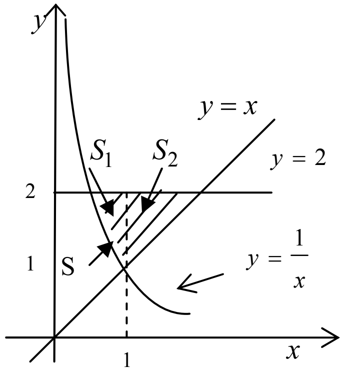
Проекцией области S на ось Oy является отрезок $[0;48]$.

Тогда ДИ сводится к повторному:

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^{48} dy \int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\,dx.$$

Задача 2.2. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy$ по заданной области $S: y=2,\ y=x,\ xy=1$.

Решение. Построим область интегрирования S. Она является правильной в направлении оси Ox: $x=\dfrac{1}{y}$ – линия входа, $x=y$ – линия выхода. Проекцией области S на ось Oy является отрезок $[1;2]$.



Тогда ДИ сводится к повторному:

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \int\limits_1^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)\,dx.$$

В направлении оси Oy линия входа области интегрирования S не имеет единого аналитического задания, поэтому разобьем ее на сумму двух областей S_1 и S_2. Для области $S_1: \dfrac{1}{x} \le y \le 2,\ x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Для области $S_2: x \le y \le 2,\ x\in[1;2]$.

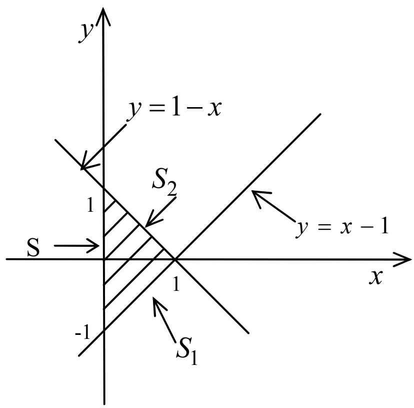
Таким образом,

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint_{S_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{\frac{1}{x}}^{2} f\left(x,y\right)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{x}^{2} f\left(x,y\right)dy.$$

Задача 2.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле: $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f\left(x,y\right)dy.$

Решение. Восстановим область интегрирования S: линия входа – $y = x-1$, линия выхода – $y = 1-x$. Проекция области S на ось Ox – отрезок $\left[0;1\right]$. Значит, область S имеет вид, представленный на рисунке.



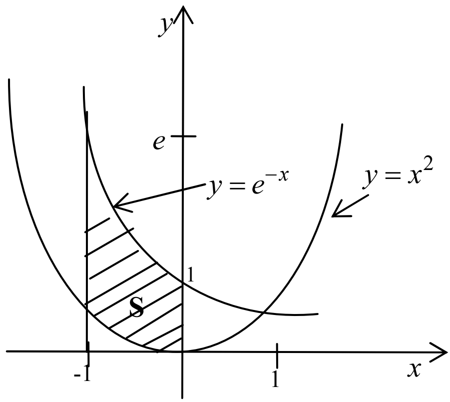
Изменить порядок интегрирования – значит внешнее интегрирование выполнять по *y,* а внутреннее по *x*. В направлении оси Ox линия выхода области интегрирования S не имеет единого аналитического задания, поэтому разобьем ее на сумму двух областей S_1 и S_2. Для области $S_1: 0 \le x \le y+1,\ y \in \left[-1;0\right].$ Для области $S_2: 0 \le x \le 1-y,\ y \in \left[0;1\right].$

Тогда

$$\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f\left(x,y\right)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_0^{y+1} f\left(x,y\right)dx + \int_0^1 dx \int_0^{1-y} f\left(x,y\right)dx.$$

Задача 2.4. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\left(x,y\right)dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f\left(x,y\right)dx.$

Решение. Восстановим область интегрирования S, которая состоит из суммы двух областей S_1 и S_2. Линия входа для S_1 – $x=-\sqrt{y}$, линия выхода – $x=0$. Проекция области S_1 на ось Oy – отрезок $[0;1]$. Линия входа для S_2 – $x=-1$, линия выхода – $x=-\ln y$. Проекция области S_2 на ось Oy – отрезок $[1;e]$. Значит, область S имеет вид, представленный на рисунке.



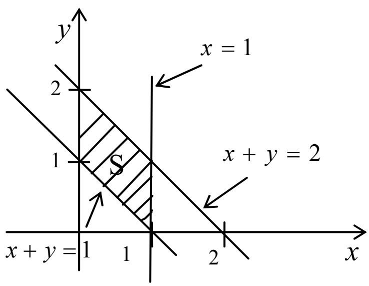
Область интегрирования S является правильной в направлении оси Oy: $y=x^2$ – линия входа, $y=e^{-x}$ – линия выхода. Проекцией области S на ось Ox является отрезок $[-1;0]$.

Тогда

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f(x,y)\,dy.$$

Задача 2.5. Вычислить ДИ $\iint\limits_S \left(x^2+y\right)dxdy$ по области S, ограниченной линиями $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$, $x=1$.

Решение. Построим область интегрирования S. Область S является правильной в направлении оси Oy: $y=1-x$ – линия входа, $y=2-x$ – линия выхода. Проекция области S на ось Ox – отрезок $[0;1]$.



Тогда

$$\iint\limits_S \left(x^2+y\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} \left(x^2+y\right)dy =$$

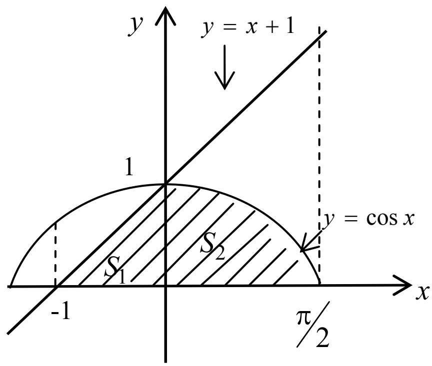
$$= \int\limits_0^1 \left(\left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{1-x}^{2-x} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}(2-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задача 2.6. Вычислить площадь плоской фигуры S, ограниченной линиями: $y=\cos x$, $y \le x+1, y \ge 0$.

Решение. Построим область интегрирования S.

В направлении оси Oy линия выхода области интегрирования S не имеет единого аналитического задания, поэтому разобьем ее на сумму двух областей S_1 и S_2. Для области S_1: $0 \le y \le x+1$, $x \in [-1;0]$; для области S_2: $0 \le y \le \cos x$, $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



$$S = \iint\limits_S dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{x+1} dy + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} dy = \int\limits_{-1}^{0} (x+1)dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $S=\frac{3}{2}$ (кв. ед).

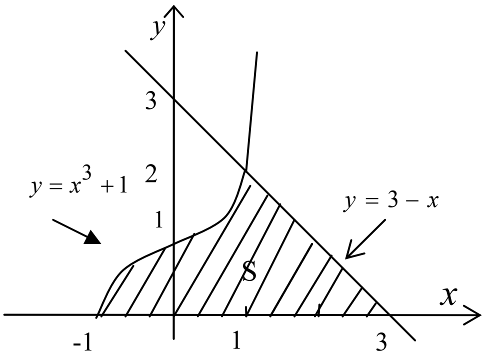
Задача 2.7. Вычислить массу пластины, ограниченной линиями $y = x^3 + 1$, $y = 3 - x$, $y = 0$, если плотность в каждой ее точке равна квадрату ее абсциссы.

Решение. По условию плотность $\gamma(x, y) = x^2$, тогда масса плоской пластины вычисляется по формуле $m = \iint\limits_S \gamma(x, y)\,dxdy$. Построим область интегрирования S, ограниченную кубической параболой $y = x^3 + 1$ и прямой $y = 3 - x$, и осью Ox.

Найдем точку пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow x^3 + 1 = 3 - x \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1,\ y = 2.$$

Область интегрирования S является правильной в направлении оси Ox. Линию входа находим из уравнения $y = x^3 + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$, а линия выхода – $y = 3 - x$. Проекцией области S на ось Oy является отрезок $[0; 2]$.



Тогда

$$m = \iint\limits_S \gamma(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y-1}}^{3-y} x^2 dx = \int\limits_0^2 \left(\left. \frac{x^3}{3} \right|_{\sqrt[3]{y-1}}^{3-y} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \left((3-y)^3 - (y-1) \right) dy = \frac{1}{3} \left. \left(-\frac{(3-y)^4}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} \right) \right|_0^2 = \frac{20}{3}.$$

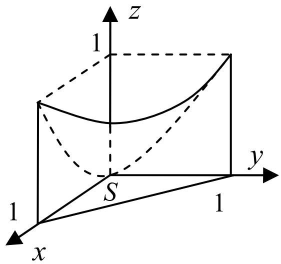
Ответ: $m = \dfrac{20}{3}$ (ед. массы).

Задача 2.8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело: $x + y = 1$ – плоскость параллельная оси Oz; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – координатные плоскости; $z = x^2 + y^2$ – эллиптический параболоид.

Из геометрического смысла двойного интеграла следует, что

$$v = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$



где область S – проекция тела на плоскость xOy.

Эта область является правильной в направлении оси Oy: $y = 0$ – линия входа, $y = 1 - x$ – линия выхода.

Тогда

$$v = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right) dy = \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dy = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $v = \dfrac{1}{6}$ (куб. ед)

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.9. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f\left(x, y\right) dxdy$ по заданной области S: $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

Задача 2.10. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f\left(x, y\right) dxdy$, если область S – трапеция с вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$.

Задача 2.11. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2.12. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле: $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)dy.$

Задача 2.13. Вычислить ДИ $\iint\limits_{S} \frac{x^2}{y^2}dxdy$ по области S, ограниченной линиями $y = x$, $y = 2$, $yx = 1$.

Ответ: $\iint\limits_{S} \frac{x^2}{y^2}dxdy = \frac{27}{64}.$

Задача 2.14. Найти площадь плоской области, ограниченной параболами $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

Ответ: $S = \frac{16}{3}\sqrt{15}$ (кв. ед).

Задача 2.15. Вычислить площадь плоской фигуры S, ограниченной линиями: $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$, $y = 0\,(a > 0)$.

Ответ: $S = \frac{10}{3}a^2$ (кв. ед).

Задача 2.16. Вычислить массу пластины, ограниченной линиями $y = x$, $xy = 1$, $x = 2$, если плотность в каждой ее точке прямо пропорциональна квадрату ее абсциссы и обратно пропорциональна квадрату ее ординаты.

Ответ: $m = \frac{9}{4}$ (ед. массы).

Задача 2.17. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $z=9-y^2$, координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и плоскостью $3x+4y=12\left(y\geq 0\right)$.

Ответ: $v=45$ (куб. ед).

Задача 2.18*. Вычислить ДИ $\iint\limits_S ydxdy$ по области S, ограниченной осью абсцисс и аркой циклоиды $\begin{cases} x=R\left(t-\sin t\right), \\ y=R\left(1-\cos t\right), \end{cases}$ $\left(0\leq t\leq 2\pi\right)$.

Ответ: $\frac{5}{2}\pi R^3$.

Задача 2.19*. Найти давление железнодорожного вагона на рельс, которое рассчитывается по формуле $Q=\iint\limits_S qdxdy$, где $q=\lambda t\left(1-\frac{x^2}{2rt}-\frac{y^2}{2pt}\right)$, λ, r, p, $t-$ постоянные. При этом площадка смятия рельса проецируется на плоскость xOy в виде области S, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{2rt}+\frac{y^2}{2pt}=1$.

Ответ: $Q=\pi\lambda\cdot\frac{ab}{2}$, где $a=\sqrt{2pt}$, $b=\sqrt{2rt}$ – полуоси эллипса.

Практическое задание № 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА (ДИ) В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Полярной системой координат удобно пользоваться, если область интегрирования является кругом или сектором, или линией, уравнение которой содержит выражение $x^2 + y^2$. Поэтому в целях упрощения вычислений $\iint\limits_S f(x, y)dxdy$ переходят к полярным координатам, используя следующие формулы перехода:

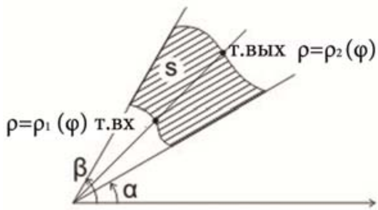
$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ ds = dxdy = \rho d\varphi d\rho,\ \ x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Таким образом

$$\iint\limits_S f(x, y)dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} = \iint\limits_S f\left(\rho\cos\rho,\ \rho\sin\rho\right)\rho d\rho d\varphi.$$

Пусть в полярной системе координат плоская область S ограничена кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, причем $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ и $\alpha \le \beta$.

Плоская область S называется *правильной относительно полярной системы координат,* если любой луч, проходящий через внутренние точки области, пересекает ее границу не более чем в двух точках.

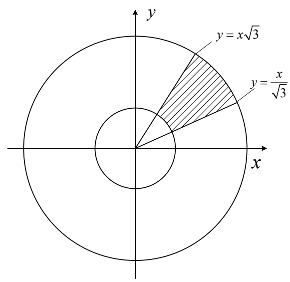


В этом случае двойной интеграл примет вид

$$\iint\limits_S g\left(\varphi, \rho\right)ds = \iint\limits_S g\left(\varphi, \rho\right)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} g\left(\varphi, \rho\right)\rho d\rho.$$

Задача 3.1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_S f(x,y)\,dxdy$ по заданной области $S: 1 \le x^2 + y^2 \le 9,$ $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}.$

Решение. Границами области S являются окружности $x^2 + y^2 = 1,$ $x^2 + y^2 = 9,$ уравнения которых в полярных координатах имеют вид $\rho = 1,$ $\rho = 3,$ и прямые – $y = \frac{x}{\sqrt{3}},$ $y = x\sqrt{3}$ уравнения которых в полярных координатах – $\varphi = \frac{\pi}{6},$ $\varphi = \frac{\pi}{3}.$ Область является правильной относительно полярной системы координат. Двигаясь по лучу, выходящему из полюса, получаем $\rho_{\text{вх}} = 1,$ $\rho_{\text{вых}} = 3.$ Область S заключена между лучами $\varphi = \frac{\pi}{6},$ $\varphi = \frac{\pi}{3},$ поэтому $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$



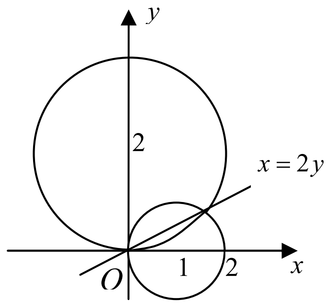
Тогда

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \iint_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^3 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Задача 3.2. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_S f(x,y)\,dxdy$ по заданной области $S,$ которая является общей частью двух кругов $x^2 + y^2 \le 2x,$ $x^2 + y^2 \le 4y.$

Решение. Границами области являются окружности: $x^2+y^2=$ $=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ – это окружность с центром (1;0), радиусом 1, в полярных координатах уравнение ее имеет вид $\rho=2\cos\varphi$; $x^2+y^2=4y \Leftrightarrow$ $x^2+(y-2)^2=4$ – это окружность с центром (0;2), радиусом 2, в полярных координатах уравнение ее имеет вид $\rho=4\sin\varphi$.



Точки пересечения окружностей лежат на прямой $2x=4y$, в полярных координатах – $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$ или $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

В полярной системе координат линия выхода области интегрирования S не имеет единого аналитического задания, прямой $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ она разбивается на две части $S_1: 0\le\varphi\le\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, для нее $\rho_{\text{вх}}=0$, $\rho_{\text{вых}}=4\sin\varphi$; и $S_2: \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, для нее $\rho_{\text{вх}}=0$, $\rho_{\text{вых}}=2\cos\varphi$.

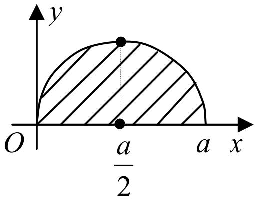
Тогда

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy=\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{matrix}\right|=\iint\limits_S f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Задача 3.3. Переходя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_S y dxdy$, где S – полукруг диаметра a с центром в точке $C\left(\frac{a}{2};0\right)$.

Решение. Полукруг S ограничен окружностью $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ или $x^2+y^2=ax,$ уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho=a\cos\varphi.$



Тогда

$$\iint_S ydxdy=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{vmatrix}=\iint_S \rho\sin\varphi\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\begin{vmatrix} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le a\cos\varphi \end{vmatrix}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{a\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

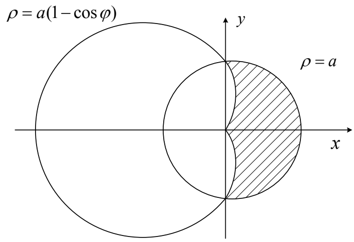
$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=-\frac{a^3}{3}\cdot\left.\frac{\cos^4\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3}{12}.$$

Ответ: $\iint_S ydxdy=\dfrac{a^3}{12}.$

Задача 3.4. Вычислить массу плоской фигуры $S,$ ограниченной линиями $\rho=a(1-\cos\varphi),$ $\rho=a$ и расположенную вне кардиоиды, если плотность в каждой ее точке обратно пропорциональна расстоянию до полюса.

Решение. По условию плотность $\gamma(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$ тогда масса плоской пластины вычисляется по формуле $m=\iint_S\gamma(x,y)dxdy=$ $=\iint_S\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$

Построим область S, которая ограничена кардиоидой $\rho = a\left(1-\cos\varphi\right)$ и окружностью $\rho = a$.



Область является правильной относительно полярной системы координат. Двигаясь по лучу, выходящему из полюса, получаем $\rho_{\text{вх}} = a(1-\cos\varphi)$, $\rho_{\text{вых}} = a$. Область S заключена между лучами $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Так как фигура симметрична, то будем считать, что $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ и при вычислении массы перед интегралом поставим коэффициент 2.

Тогда

$$m = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} = \iint_S d\rho d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ a\left(1-\cos\varphi\right) \le \rho \le a \end{vmatrix} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a(1-\cos\varphi)}^{a} d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho\Big|_{a(1-\cos\varphi)}^{a}\right) d\varphi =$$

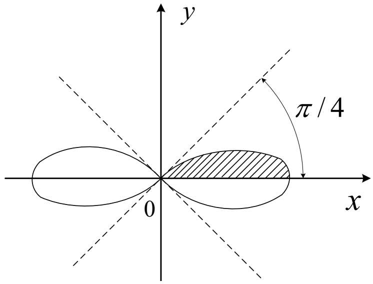
$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\left(1-\cos\varphi\right)\right) d\varphi = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = a\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a.$$

Ответ: $m = a$ (ед. массы).

Задача 3.5. Вычислить площадь области, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$ (лемниската Бернулли).

Решение. Уравнение лемнискаты в полярных координатах имеет вид: $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Область является правильной относительно полярной системы координат.

С учетом симметрии пластины, получаем



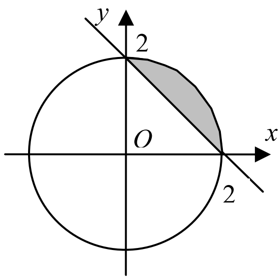
$$s=\iint\limits_S dxdy=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\iint\limits_S \rho d\rho d\varphi=\begin{vmatrix} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\rho_{вх}=0, \\ \rho_{вых}=a\sqrt{2\cos2\varphi}\end{vmatrix}=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}}\rho d\rho=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}}\right)d\varphi=4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\varphi d\varphi=2a^2.$$

Ответ: $s=2a^2$ (кв. ед).

Задача 3.6. Вычислить площадь меньшего из двух сегментов, на которые прямая $x+y=2$ рассекает круг $x^2+y^2\le4$.



Решение. Уравнение окружности в полярных координатах $\rho=2$, а уравнение прямой $\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi=2$ или $\rho=\dfrac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}$.

Тогда

$$s=\iint\limits_S dxdy=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{vmatrix}=\iint\limits_S \rho d\rho d\varphi=$$

$$=\begin{vmatrix} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\ \rho_{вых}=2,\ \ \rho_{вх}=\dfrac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}\end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{2} \rho d\rho = \left| \begin{matrix} \cos\varphi+\sin\varphi = \\ =\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}}^{2} \rho d\rho =$$

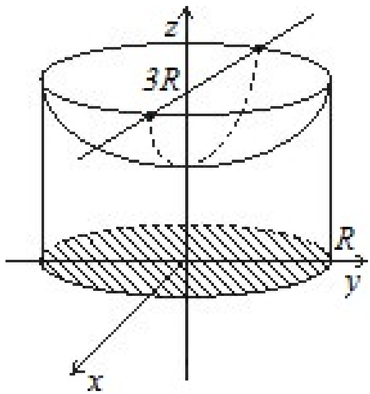
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4-\frac{2}{\cos^2\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)} \right) d\varphi = \pi-2.$$

Ответ: $s=\pi-2.$

Задача 3.7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2$, $Rz=2R^2+x^2+y^2$, $z=0$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело: $x^2+y^2=R^2$ – круговой цилиндр, $Rz=2R^2+x^2+y^2$ – эллиптический параболоид, $z=0$ – плоскость *xOy*.

Из геометрического смысла двойного интеграла следует, что



$$v=\frac{1}{R}\iint\limits_{S_{xy}} (2R^2+x^2+y^2)dxdy,$$

где область S_{xy} – проекция тела на плоскость *xOy*, которая является окружностью $x^2+y^2=R^2$ или в полярных координатах $\rho=R$.

Тогда, с учетом симметрии тела,

$$v=\frac{1}{R}\iint\limits_{S_{xy}} (2R^2+x^2+y^2)dxdy = \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$=\frac{1}{R}\iint\limits_{S_{xy}}\left(2R^2+\rho^2\right)\rho d\rho d\varphi=\left|\begin{array}{c}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ \rho_{\text{вх}}=0,\ \rho_{\text{вых}}=R\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{R}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^R\left(2R^2\rho+\rho^3\right)d\rho=\frac{4}{R}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{5R^4}{4}=\frac{5}{2}\pi R^3.$$

Ответ: $v=\dfrac{5}{2}\pi R^3$ (куб. ед.).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.8. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_S f\left(x,y\right)dxdy,$ если область S ограничена линиями: $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=x,\ y=2x.$

Задача 3.9. Переходя к полярным координатам, вычислить $I=\iint\limits_S\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy,$ где $S-$ полукруг радиуса a с центром в начале координат, лежащий выше оси Ox.

Ответ: $I=\dfrac{\pi a^3}{3}.$

Задача 3.10. Вычислить $I=\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\dfrac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ с помощью перехода к полярным координатам.

Ответ: $I=\dfrac{\pi}{4}\ln\left(1+R^2\right).$

Задача 3.11. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $\rho=a\left(1+\cos\varphi\right),\ \rho=a\cos\varphi\left(a>0\right).$

Ответ: $s = \frac{5}{4}\pi a^2$ (кв. ед).

Задача 3.12. Вычислить площадь области, ограниченной линией $\rho = a \sin 3\varphi \left(a > 0\right)$.

Ответ: $s = \frac{\pi a^2}{4}$ (кв. ед).

Задача 3.13. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых R и r $\left(R > r\right)$. Найти массу кольца, если плотность в каждой ее точке равна квадрату абсциссы этой точки.

Ответ: $m = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right)$ (ед. массы).

Задача 3.14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4z^2$, $z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ответ: $v = \frac{2\pi}{3}$ (куб. ед.).

Задача 3.15*. Вычислить интеграл $\iint\limits_S xydxdy$, где S – область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

Примечание. Декартовы координаты преобразовать по формулам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$ $\left(a, b - \text{постоянные}\right)$. Такие координаты ρ, φ называются обобщенными полярными координатами. Исходя из геометрических соображений, показать, что элементом площади будет $ds = dxdy = ab\rho d\rho d\varphi$.

Ответ: $\iint\limits_S xydxdy = \frac{a^2b^2}{8}$.

Задача 3.16*. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_S \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}dxdy,$ где S – область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$

Примечание. Перейти к обобщенными полярным координатам $x=2\rho\cos\varphi,\quad y=3\rho\sin\varphi,\quad ds=dxdy=6\rho d\rho d\varphi.$

Ответ: $I=4\pi.$

Задача 3.17*. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_S \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,$ где S – часть эллиптического кольца, ограниченного эллипсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1,$ и лежащая в первом квадранте.

Примечание. Перейти к обобщенными полярным координатам $x=a\rho\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\varphi,\quad ds=dxdy=ab\rho d\rho d\varphi.$

Ответ: $I=\frac{\pi ab\sqrt{3}}{2}.$

Задача 3.18*. Определить среднюю скорость течения воды в круглой трубе радиусом R при уклоне α, если скорость течения v на расстоянии r от оси трубы равна $v=v_0-21\sqrt{\frac{R\alpha}{2}}\left(\frac{r}{R}\right)^3$, где v_0 – скорость течения на оси трубы.

Примечание. Для вычисления средней скорости течения воды воспользоваться формулой Базена: $v_{\text{ср}}=\frac{1}{\text{s}}\iint\limits_{(D)} vds,$ где (D) – поперечное сечение трубы, s – его площадь.

Ответ: $v_{\text{ср}}=v_0-\frac{42}{5}\sqrt{\frac{R\alpha}{2}}.$

Практическое задание № 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$ сводится к последовательному интегрированию по каждой из переменных x, y, z от которых зависит подынтегральная функция.

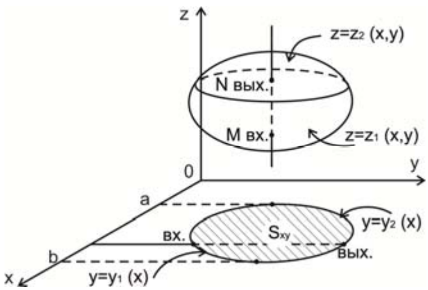
Пространственная область V, ограниченная замкнутой поверхностью σ, называется *правильной в направлении оси Oz*, если выполняются следующие требования:

1) всякая прямая, проведенная параллельно оси Oz через внутренние точки области, пересекает поверхность σ в двух точках;

2) проекция области V на плоскость xOy – плоская область S_{xy}, которая является правильной в направлении одной из осей.

Пусть правильная в направлении оси Oz пространственная область V ограничена снизу поверхностью σ_1, уравнение которой $z = z_1(x,y)$, сверху поверхностью σ_2 с уравнением $z = z_2(x,y)$. Соответственно, σ_1 – поверхность входа, σ_2 – поверхность выхода.

Проекция области V на плоскость xOy – плоская область S_{xy}, ограниченная линиями $y = y_1(x)$ – линия входа, $y = y_2(x)$ – линия выхода в области, причем $y_1(x) \le y_2(x)$. Проекцией плоской области S_{xy} на ось Ox является отрезок $[a,b]$.



Пусть в пространственной области V задана непрерывная функция $f(x,y,z)$. Расстановка пределов интегрирования в этом случае имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{S_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

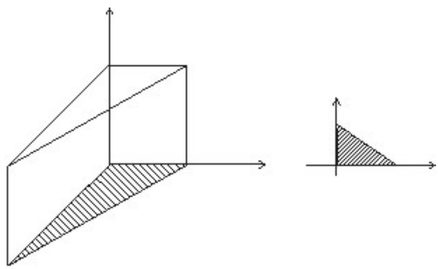
Замечание 1. Пространственную область V можно проектировать и на другие координатные плоскости, при этом меняется порядок интегрирования, что влечет за собой изменение пределов интегрирования по каждой из переменных, но численное значение интеграла сохраняется.

Замечание 2. Если область V не является правильной в направлении какой-либо оси, ее разбивают на сумму правильных областей; тогда интеграл будет равен сумме интегралов по составляющим областям.

Задачи для решения в аудитории

Задача 4.1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, если область V ограничена плоскостями: $x+y+z=5$, $2x+3y=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Построим плоскости, ограничивающие данное тело: $2x+3y=6$ – плоскость параллельная оси Oz, $x=0$, $y=0$, $z=0$ – координатные плоскости, $x+y+z=5$ – плоскость, отсекающая на осях отрезки равные 5, S_{xy} – проекция тела на плоскость xOy.



Пространственная область V правильная в направлении оси Oz ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху $z=5-x-y$. Соответственно, $z=0$ – поверхность входа, $z=5-x-y$ есть поверхность выхода.

Проекция области V на плоскость xOy – плоская область S_{xy}, ограниченная линиями $x=0$ – линия входа, $y=\frac{6-2x}{3}$ – линия выхода области S_{xy}. Проекцией плоской области S_{xy} на ось Ox является отрезок $[0,3]$.

$$\iint_V f(x,y,z)dxdydz == \iint_{S_{xy}} dxdy \int_0^{5-x-y-z} f(x,y,z)\,dz =$$

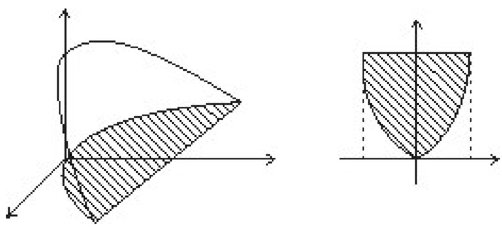
$$=\int_0^3 dx \int_0^{\frac{6-2x}{3}} dy \int_0^{5-x-y-z} f(x,y,z)\,dz.$$

Задача 4.2. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y=4x^2$, $y+z=4$, $z=0$.

Решение. Тело V ограничено цилиндрической поверхностью $y=4x^2$ с образующей параллельной оси Oz плоскостью $y+z=4$ и плоскостью xOy. Проекцию тела на плоскость xOy обозначим S_{xy}.

Пространственная область V правильная в направлении оси Oz ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху $z=4-y$. Соответственно, $z=0$ – поверхность входа, $z=5-y$ – поверхность выхода.

Проекция области V на плоскость xOy – плоская область S_{xy}, ограниченная линиями $y=4x^2$ – линия входа, $y=4$ – линия выхода области S_{xy}. Проекцией плоской области S_{xy} на ось Ox является отрезок $[-1;1]$.



Тогда

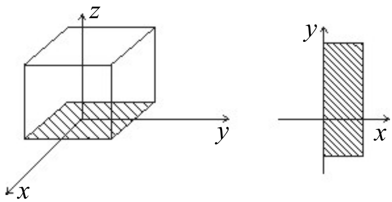
$$\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{S_{xy}} dxdy \int\limits_0^{4-y} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{4x^2}^{4} dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y,z)\,dz.$$

Задача 4.3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2y+2z\right)dxdydz$, если тело V ограничено плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=-1$, $y=3$, $z=0$, $z=2$.

Решение. Построим тело. Проекцию тела на плоскость xOy обозначим S_{xy}.

Тогда



$$\iiint\limits_V \left(x^2y+2z\right)dxdydz = \iint\limits_{S_{xy}} dxdy\int\limits_0^2\left(x^2y+2z\right)dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 dy\int\limits_0^2\left(x^2y+2z\right)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 \left(x^2yz+z^2\right)\Big|_0^2 dy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3\left(2x^2y+4\right)dy =$$

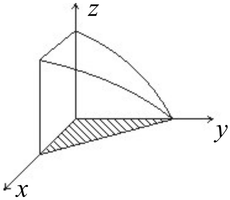
$$= \int\limits_0^1\left(x^2y^2+4y\right)\Big|_{-1}^3 dx = \int\limits_0^1\left(9x^2+12-x^2+4\right)dx = \int\limits_0^1\left(8x^2+16\right)dx = \frac{56}{3}.$$

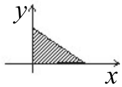
Ответ: $\frac{56}{3}$.

Задача 4.4. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $z=9-y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $3x+4y= =12\,(y\ge 0)$.

Решение. Построим тело: образующая цилиндра $z=9-y^2$ параллельна оси Ox, плоскость $3x+4y=12$ параллельна оси Oz.

Проекцию тела на плоскость xOy обозначим S_{xy}. Область V правильная в направлении оси Oz ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху $z=9-y^2$.





Соответственно, $z=0$ – поверхность входа, $z=9-y^2$ будет поверхность выхода.

Проекция области V на плоскость xOy – плоская область S_{xy}, ограниченная линиями $x=0$ – линия входа, $y=\dfrac{12-3x}{4}$ – линия выхода области S_{xy}. Проекцией плоской области S_{xy} на ось Ox является отрезок $[0;4]$.

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_{S_{xy}} dxdy\int\limits_0^{9-y^2} dz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\frac{12-3x}{4}} dy\int\limits_0^{9-y^2} dz=$$

$$=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\frac{12-3x}{4}}\left(9-y^2\right)dy=\int\limits_0^4\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{12-3x}{4}}dx=$$

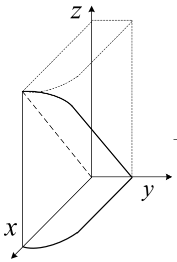
$$=\int\limits_0^4\left(\frac{27}{4}(4-x)-\frac{9}{64}(4-x)^3\right)dx=45.$$

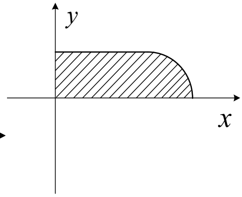
Ответ: $v=45$ (куб. ед.).

Задача 4.5. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z=0$, $z-x=0$, $y=0$, $y=2$ и цилиндром $x=\sqrt{9-y^2}$.

Решение. Построим тело: образующая цилиндра $x=\sqrt{9-y^2}$ параллельна оси Oz, причем $x\geq 0$; плоскость $y=2$ параллельна плоскости xOz; плоскость $z-x=0$ проходит через ось Oy. Соответственно, $z=0$ – поверхность входа, $z=x$ – поверхность выхода.

Проекцию тела на плоскость xOy обозначим S_{xy}. Ее проекцией на ось Oy является отрезок $[0;2]$, $x=0$ – линия входа, $x= =\sqrt{9-y^2}$ – линия выхода области S_{xy}.





Тогда

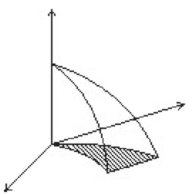
$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_{S_{xy}} dxdy\int\limits_0^x dz=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} dx\int\limits_0^x dz=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} xdx=$$

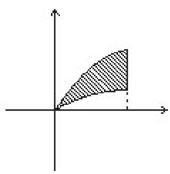
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(9-y^2\right)dy=\frac{1}{2}\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{23}{3}.$$

Ответ: $v=\dfrac{23}{3}$ (куб. ед.).

Задача 4.6. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{y}$, $z=2\sqrt{y}$, $x+y=6$, $x=0$, если плотность тела в каждой ее точке равна квадрату ординаты точки.

Решение. По условию плотность $\gamma(x,y,z)=y^2$, тогда масса тела вычисляется по формуле $m=\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V y^2dxdydz.$ Тело V ограничено цилиндрическими поверхностями $z=\sqrt{y},\quad z=2\sqrt{y}$, (образующие которых параллельны оси Ox,) плоскостью $x+y=6$ и плоскостью yOz. Для удобства построения тела ось Ox направим вверх, а проекцию тела на плоскость yOz обозначим S_{yz}.





Область V правильная в направлении оси Ox ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху плоскостью $x=6-y$. Соответственно, $z=0$ – поверхность входа, $x=6-y$ – поверхность выхода.

Проекция области V на плоскость yOz – плоская область S_{yz}, ограниченная линиями $z=\sqrt{y}$ – линия входа, $z=2\sqrt{y}$ – линия выхода области S_{yz}. Проекцией плоской области S_{yz} на ось Oy является отрезок $[0;6]$.

Тогда

$$m=\iiint\limits_V y^2dxdydz=\iint\limits_{S_{yz}} y^2dydz\int\limits_0^{6-y}dx=\iint\limits_{S_{yz}}(6-y)y^2dydz=$$

$$=\int\limits_0^6(6-y)y^2dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}}dz=\int\limits_0^6\left(6y^2\sqrt{y}-y^3\sqrt{y}\right)dy=\frac{4\cdot 6^4\sqrt{6}}{63}.$$

Ответ: $m=\dfrac{4\cdot 6^4\sqrt{6}}{63}$ (ед. массы).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.7. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена плоскостями: $x+y=5$, $y=x$, $y=3x$, $z=0$ и параболоидом $3z=x^2+y^2$.

Задача 4.8. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y=9$, $2x-y=0$, $4z-y^2=0$, $z=0$.

Задача 4.9. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, если тело V ограничено координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{5}{16}$.

Задача 4.10. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидами $z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2$ и плоскостями $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$.

Ответ: $v = \frac{7}{12}$ (куб. ед.).

Задача 4.11. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0$.

Ответ: $v = \frac{88}{105}$ (куб. ед.).

Задача 4.12. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z - 1 + x^2 = 0,\ y = 3 - x,\ y = 0,\ z = 0$.

Ответ: $v = 4$ (куб. ед.).

Задача 4.13. Найти массу прямоугольного параллелепипеда $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c,$ если плотность в каждой его точке равна сумме координат этой точки.

Ответ: $m = \frac{abc}{2}(a + b + c)$ (ед. массы).

Задача 4.14*. Вычислить массу общей части двух однородных круговых цилиндров, имеющих одинаковое поперечное сечение радиусом R, если их оси пересекаются под прямым углом.

Указание. Выбрать систему координат так, чтобы оси данных цилиндров совпадали с осями Oy и Oz. Тогда уравнения цилиндров будут иметь вид: $x^2 + y^2 = R^2;\ x^2 + z^2 = R^2$. Так как тело однородное, то его плотность считать равным $\gamma = \text{const},\ \gamma > 0$.

Ответ: $m = \frac{16}{3}\gamma R^3$ (ед. массы).

Задача 4.15*. Найти массу куба с ребром a, если плотность в каждой его точке численно равна сумме ее расстояний до трех граней этого куба, проходящих через одну его вершину.

Ответ: $m = \frac{3}{2}a^4$ (ед. массы).

Практическое задание № 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

К цилиндрическим координатам целесообразно переходить, когда уравнение поверхностей, ограничивающих тело, содержит $x^2 + y^2$.

Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве можно характеризовать с помощью цилиндрических координат (ρ, φ, z), где ρ, φ – полярные координаты проекции точки M на плоскость xOy, z – аппликата точки M.

Цилиндрические координаты (ρ, φ, z) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z. \qquad (5.1)$$

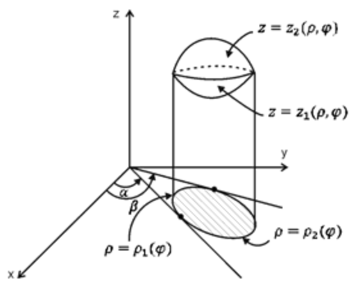
В качестве элементарного объема принимают параллелепипед со сторонами $\rho d\varphi$, $d\rho$, dz, тогда

$$dv = \rho d\varphi d\rho dz. \qquad (5.2)$$

Формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\varphi d\rho dz.$$



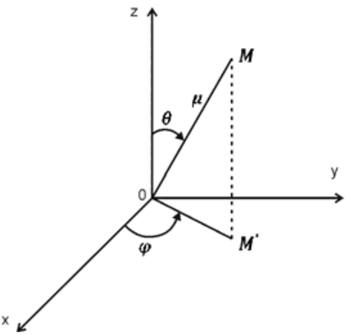
Для случая области V, изображенной на рисунке, расстановка пределов интегрирования примет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz. \qquad (5.3)$$

Замечание. Внутреннее интегрирование обычно удобно вести по *z,* среднее – по ρ и внешнее – по φ.

К сферическим координатам целесообразно переходить в том случае, когда тело ограничено сферой $r = \text{const}$, конусом $\theta = \text{const}$ или поверхностью, уравнение которой содержит выражение $x^2 + y^2 + z^2$.

Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве можно определить сферическими координатами (r, φ, θ), где r – расстояние точки M от начала координат; φ – угол между осью Ox и проекцией радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость xOy; θ – угол между осью Oz и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M. Очевидно, что $0 \le r \le +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.



Связь между сферическими (r, φ, θ) и декартовыми координатами (x, y, z) точки M определяется формулами:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\; y = r\sin\varphi\sin\theta,\; z = r\cos\theta; \tag{5.4}$$

$$dv = r^2 \cdot \sin\theta d\varphi d\theta dr. \tag{5.5}$$

Формула преобразований тройного интеграла к сферическим координатам имеет вид

$$\begin{gathered}\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \\ = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr.\end{gathered} \tag{5.6}$$

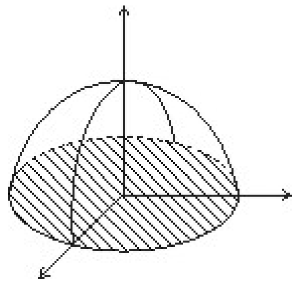
Замечание 1. Порядок расстановки пределов интегрирования в трехкратном интеграле (слева направо) – по φ, θ, r.

Замечание 2. Сначала следует расставить пределы интегрирования по r (двигаясь по лучу, выходящему из начала координат), затем по θ (двигаясь по оси Oz), потом – по φ.

Задачи для решения в аудитории

Задача 5.1. Вычислить интеграл с помощью цилиндрических координат $I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right) dz.$

Решение. В интеграле $0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, то есть поверхностью входа является плоскость $z=0$, а выхода $-$ $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ или $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \ge 0$ $-$ верхняя половина сферы, уравнение которой в цилиндрических координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$ имеет вид $z=\sqrt{R^2-\rho^2}$. Проекцией тела на плоскость xOy является окружность x^2+ $+y^2=R^2$, поэтому $0 \le \rho \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Подынтегральная функция $x^2+y^2=\rho^2$, $dxdydz=\rho d\varphi d\rho dz$.



Тогда

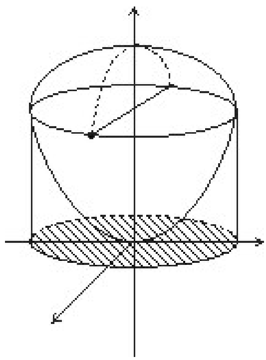
$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = 2\pi \int\limits_0^R \rho^3 \sqrt{R^2-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{l} R^2-\rho^2=t^2 \\ 2\rho d\rho=-2tdt \\ t_н=R, \mathrm{t_в}=0 \end{array} \right| = -2\pi \int\limits_R^0 \left(R^2-t^2\right) t^2 dt = 2\pi \left(R^2 \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Bigg|_0^R = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

Ответ: $I=\dfrac{4\pi R^5}{15}.$

Задача 5.2. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $x^2+y^2=3z$ (внутренний по отношению к параболоиду).

Решение. Построим тело. Линией пересечения поверхностей является окружность $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$ с центром в точке $O'(0;0;1)$, лежащая в плоскости $z=1$ и проецирующаяся на плоскость xOy в окружность $x^2+y^2=3$.



Вычислим объем тела, используя цилиндрическую систему координат. В цилиндрических координатах уравнения сферы $\rho^2+z^2=4$, параболоида – $\rho^2=3z$. Учитывая симметрию тела, получаем

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=$$

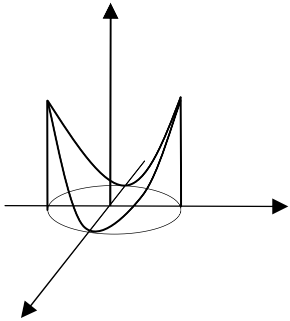
$$=\left| dxdydz=\rho d\varphi d\rho dz,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le\sqrt{3},\ \frac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2} \right|=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=4\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(\rho\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^3}{3}\right)d\rho=\frac{19}{6}\pi.$$

Ответ: $v=\frac{19}{6}\pi$ (куб. ед.).

Задача 5.3. Найти объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2+y^2=4$, $z=y^2$ и плоскостью $z=0$.

Решение. Построим тело: образующая цилиндра $x^2+y^2=4$ параллельна оси Oz, образующая цилиндра $z=y^2$ параллельна оси Ox и проходит через нее. Соответственно, $z=0$ – поверхность входа, $z=y^2$ – поверхность выхода, уравнение которой в цилиндрических координатах имеет вид $z=\rho^2\sin^2\varphi$. Проекция тела на плоскость xOy – S_{xy} – окружность $x^2+y^2=4$, поэтому $0\le\rho\le 2,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$. Учитывая симметрию тела, получаем

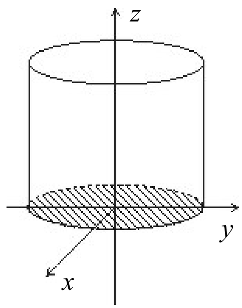


$$v=\iiint\limits_V dxdydz=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_0^{\rho^2\sin^2\varphi}dz=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\sin^2\varphi d\rho=$$

$$=2^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi=8\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi.$$

Ответ: $v=4\pi$ (куб. ед.).

Задача 5.4. Вычислить массу тела, ограниченного прямым круглым цилиндром радиуса R, высоты H, если его плотность в любой точке численно равна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.



Решение. По условию плотность $\gamma(x,y,z)=$ $=x^2+y^2+z^2$, тогда масса тела вычисляется по формуле

$$m=\iiint\limits_V\gamma(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz..$$

Для вычисления интеграла используем цилиндрическую систему координат. По формулам перехода к цилиндрическим координатам (5.1), функция плотности примет вид

$$\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+z^2=\rho^2+z^2;$$

$$m=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\left|\begin{array}{c}dxdydz=\rho d\varphi d\rho dz\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\rho\le R\\ 0\le z\le H\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho d\rho\int\limits_0^H\left(\rho^2+z^2\right)dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho\left(\rho^2 z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^H d\rho$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(\rho^3 H+\rho\frac{H^3}{3}\right)d\rho=2\pi\left(H\frac{\rho^4}{4}+\frac{H^3}{3}\cdot\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^R=\frac{\pi R^2 H}{6}\left(3R^2+2H^2\right).$$

Ответ: $m=\dfrac{\pi R^2 H}{6}\left(3R^2+2H^2\right)$ (ед. массы).

Задача 5.5. Вычислить интеграл с помощью сферических координат, если тело V ограничено поверхностями: $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$, $x\ge 0,\ y\le x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

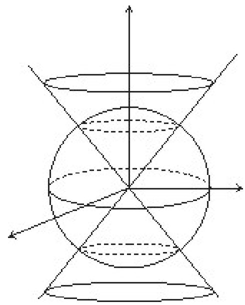
Решение. Тело ограничено сферами $x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+y^2+$ $+z^2=4,$ уравнения которых в сферических координатах имеет вид $r=1,\ r=2,$ следовательно $1\le r\le 2.$ Тело проецируется в область S_{xy}, следовательно, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}.$

Тогда

$$I=\left|\begin{array}{c}dxdydz=r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 1\le r\le 2\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{r\cos\varphi\sin\theta}{r}\end{array}\right|=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int\limits_1^2 r^2 dr=$$

$$= \left(\sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \left(\frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \right) \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7\sqrt{2}\pi}{24}.$$

Ответ: $I = \dfrac{7\sqrt{2}\pi}{24}.$



Задача 5.6. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (внешний по отношению к конусу).

Решение. Вычислим объем тела, используя сферическую систему координат. В сферических координатах уравнения сферы $r = a$, конуса $\rho = z$. Учитывая симметрию тела, получаем

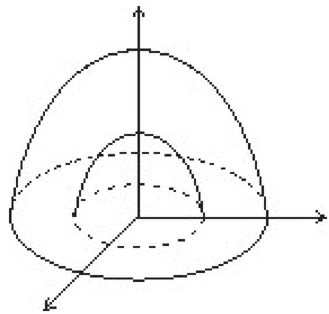
$$v = 2\iiint_V dxdydz = \left| \begin{array}{c} dxdydz = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le a \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^a r^2 dr = 4\pi \left(-\cos\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Ответ: $v = \dfrac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (куб. ед.).

Задача 5.7. Вычислить массу материального тела, ограниченного сферами $a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ и плоскостью $z \ge 0$, если плотность в каждой точке равна сумме квадратов абсциссы и ординаты этой точки.

Решение. По условию плотность $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$, тогда масса тела вычисляется по формуле



$$m=\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz.$$

Для вычисления интеграла используем сферическую систему координат. По формулам перехода к сферическим координатам (5.4), функция плотности примет вид

$$\gamma(x,y,z)=x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta=r^2\sin^2\theta.$$

Тогда

$$m=\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz=\left|\begin{array}{c} dxdydz=r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ a\le r\le R\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\int\limits_a^R r^4dr=2\pi\left(-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)d\cos\theta\right)\cdot\frac{r^5}{5}\Bigg|_a^R=$$

$$=\frac{2\pi}{5}\left(R^5-a^5\right)\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi}{15}\left(R^5-a^5\right).$$

Ответ: $m=\dfrac{4\pi}{15}\left(R^5-a^5\right)$ (ед. массы).

Задача 5.8. Вычислить интеграл с помощью цилиндрических координат $I=\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

Ответ: $I=\dfrac{8a^2}{9}$.

Задача 5.9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=4-x^2-z^2$, $x^2+z^2=1$.

Ответ: $v=\dfrac{10\pi}{3}$ (куб. ед.).

Задача 5.10. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x=y^2+z^2$, $x=2$, если плотность равна квадрату расстояния точки до начала координат.

Ответ: $m=\dfrac{32\pi}{3}$ (ед. массы).

Задача 5.11. Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где V − внутренность шара $x^2+y^2+z^2\le x$.

Ответ: $I=\dfrac{\pi}{10}$.

Задача 5.12. Вычислить объем тела, ограниченного сферами $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$ и конусом $x^2+y^2=z^2$ (внутренний по отношению к конусу).

Ответ: $v=\dfrac{28\pi}{3}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (куб. ед.).

Задача 5.13*. Вычислить интеграл с помощью сферических координат $I=\iiint\limits_V z^2 dxdydz,$ если тело V общая часть шаров $x^2+y^2+z^2\le R^2;\ x^2+y^2+z^2\le 2Rz.$

Ответ: $I=\dfrac{59\pi R^5}{480}.$

Задача 5.14*. Вычислить среднюю плотность шара x^2+y^2+ $+z^2\le 9,$ если плотность в каждой его точке численно равна расстоянию ее от начала координат.

Примечание. Средняя плотность определяется по формуле $\gamma_{\text{ср}}=$ $=\dfrac{m}{v},$ где m – масса шара, v – объем шара.

Ответ: $\gamma_{\text{ср}}=\dfrac{9}{4}.$

Задача 5.15*. Вычислить массу строения в виде круглого конуса высотой h, если угол между осью и образующими равен α. Плотность вещества пропорциональна n-й степени расстояния от плоскости, проведенной через вершину конуса параллельно основанию.

Примечание. Расположить конус в системе координат так, что вершина конуса находится в начале координат, ось Oz является осью симметрии конуса, тогда уравнение конической поверхности примет вид $z^2=\left(x^2+y^2\right)\operatorname{tg}\alpha,$ функция плотности $\gamma=k\cdot z^n,$ где k – коэффициент пропорциональности.

Ответ: $m=\dfrac{k\pi h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+1}$ (ед. массы).

Задача 5.16*. Найти притяжение однородным конусом его вершины, если высота конуса равна h, а образующая l.

Примечание. Расположить конус в системе координат так, что вершина его находится в начале координат, ось Oz является осью симметрии конуса, тогда уравнение конической поверхности примет вид $x^2 + y^2 = \frac{l^2 - h^2}{h^2} z^2$.

Если масса тела объемом v оказывает притяжение на точку $A(x_0, y_0, z_0)$ (массы 1) по закону Ньютона, то проекции силы притяжения $\vec{F}$ на координатные оси найти по формулам:

$$F_x = \iiint\limits_{(v)} \frac{x - x_0}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)^3} \cdot \gamma(x, y, z)\, dxdydz;$$

$$F_y = \iiint\limits_{(v)} \frac{y - y_0}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)^3} \cdot \gamma(x, y, z)\, dxdydz;$$

$$F_z = \iiint\limits_{(v)} \frac{z - z_0}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)^3} \cdot \gamma(x, y, z)\, dxdydz.$$

Так как конус однородный $(\gamma = \mathrm{const})$ и вершина его находится в начале координат, то расчетные формулы примут вид:

$$F_x = \gamma \iiint\limits_{(v)} \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dxdydz;$$

$$F_y = \gamma \iiint\limits_{(v)} \frac{y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dxdydz;$$

$$F_z = \gamma \iiint\limits_{(v)} \frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dxdydz.$$

Ответ: $\vec{F}=\left(0;0;\dfrac{2\pi h(l-h)}{l}\cdot\gamma\right).$

Задача 5.17*. Найти притяжение, испытываемое любой точкой A массы 1 со стороной сферы.

Примечание. Систему координат выберем так, чтобы положительное направление оси проходило через точку A; начало координат поместим в центре сферы радиусом R. Обозначим $|OA|=a$ и γ – плотность в каждой точке. Очевидно, что

$$F_x=F_y=0,\;\; F_z=\iiint\limits_{(v)}\frac{\gamma(z-a)}{\left(x^2+y^2+(z-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz.$$

Ответ: $\vec{F}=\left(0;0;F_z\right),\; F_z=\begin{cases}-\dfrac{4}{3}\pi R^3\gamma\cdot\dfrac{1}{a^2}, \text{ если } a\ge \mathrm{R}\\ -\dfrac{4}{3}\pi a\gamma, \text{ если } a\le \mathrm{R}\end{cases}$

Выводы из полученного результата. Во всех случаях притяжение направлено к центру сферы, при этом точка, лежащая вне сферы $(a\ge R)$, испытывает со стороны последней такое же притяжение, какое испытала бы, если бы в центре была сосредоточена вся ее масса $m=\dfrac{4}{3}\pi R^3\gamma.$ Так как по отношению к точке, лежащей внутри сферы $(a\le R)$, притяжение не зависит от R и имеет такую же величину, как и в случае $a=R$, то ясно, что наружный сферический слой не оказывает на внутреннюю точку никакого действия.

Задача 5.18*. Найти потенциал сферы на произвольную точку A.

Примечание. Потенциал пространственного тела на точку $A(x_0,y_0,z_0)$ определяется по формуле

$$W = \iiint\limits_{(v)} \frac{\gamma(x, y, z)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} dxdydz.$$

Если использовать обозначения предыдущей задачи, то искомый потенциал выражается следующим образом:

$$W = \gamma \cdot \iiint\limits_{(v)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}.$$

Ответ: $W = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi R^3 \gamma \cdot \dfrac{1}{a}, \text{ если } a \geq R; \\ \gamma\left(2\pi R^2 - \dfrac{2}{3}\pi a^2\right), \text{ если } 0 \leq a \leq R. \end{cases}$

Выводы из полученного результата. Потенциал на точку, лежащую вне сферы, такой же, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в ее центре.

Задача 5.19*. Найти потенциал конуса высотой h и образующей l на его вершину.

Примечание. Пусть однородный конус $(\gamma = \text{const})$ в системе координат расположен так, что вершина находится в начале координат, ось Oz является осью симметрии конуса, тогда уравнение конической поверхности примет вид $x^2 + y^2 = \dfrac{l^2 - h^2}{h^2} z^2$. Искомый потенциал будет вычисляться по формуле

$$W = \gamma \cdot \iiint\limits_{(v)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ответ: $W = \pi \gamma h (l - h)$.

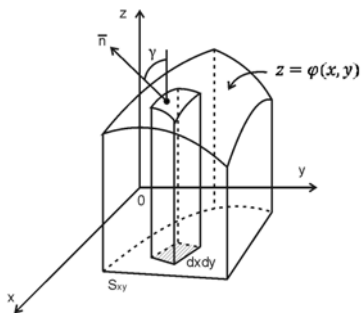
Практическое задание № 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Вычисление поверхностного интеграла по площади поверхности $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)d\sigma$ сводится к вычислению двойного интеграла по плоской области S, которая является проекцией поверхности (σ) на одну из координатных плоскостей.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Предположим, что поверхность (σ) такова, что любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает ее не более чем в одной точке. В этом случае уравнение поверхности может быть записано в виде $z=\varphi(x, y)$, здесь $\varphi(x, y)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ непрерывны в области S_{xy}, которая является проекцией (σ) на плоскость xOy.



К элементарной площадке $d\sigma$ проведем нормаль $\vec{n}$ так, чтобы она образовывала острый угол γ с осью Oz. Тогда $d\sigma$ и ее проекция на плоскость xOy связаны формулой $dxdy = d\sigma \cdot \cos\gamma$.

Так как косинус острого угла γ между нормалью $\vec{n}$ и осью Oz равен $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}$, следовательно

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Таким образом, получаем формулу сведения поверхностного интеграла к двойному:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

2. Если уравнение поверхности (σ) можно записать в виде $y=\varphi_1(x,z)$, то проведя аналогичные рассуждения, получим $dxdz = d\sigma\cos\beta$, где β – острый угол между нормалью $\vec{n}_1$ к поверхности (σ), S_{xz} – проекция поверхности (σ) на плоскость xOz.

Формула для вычисления поверхностного интеграла имеет вид:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{S_{xz}} f(x,\varphi_1(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2}\,dxdz.$$

3. Если уравнение поверхности (σ) имеет вид $x=\varphi_2(y,z)$, то формула для вычисления поверхностного интеграла

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{S_{yz}} f(\varphi_2(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)^2}\,dydz,$$

где S_{yz} – проекция поверхности (σ) на плоскость yOz.

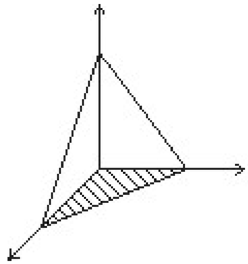
Задачи для решения в аудитории

Задача 6.1. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(z+2x+\ \ +\frac{4}{3}y\right)d\sigma,$$

где σ – часть плоскости $12x+8y+6z=24$, лежащая в первом октанте.

Решение. Найдем $d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$. Выразим $z=\varphi(x,y)$ из уравнения плоскости



$$z=\varphi(x,y)=4-2x-\frac{4}{3}y;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{4}{3};$$

$$d\sigma=\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy.$$

Тогда

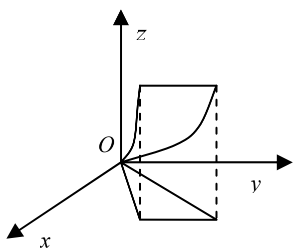
$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma=\iint\limits_{S_{xy}}\left(4-2x-\frac{4}{3}y+2x+\frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy,$$

где S_{xy} – проекция (σ) на плоскость xOy.

$$I=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{S_{xy}}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=4\sqrt{61}.$$

Ответ: $I=4\sqrt{61}$.

Задача 6.2. Вычислить площадь поверхности части цилиндра $2z=x^2$, отсеченной плоскостями $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $x=2\sqrt{2}$.



Решение. Площадь поверхности вычисляется по формуле $\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma$. Здесь $z=\frac{x^2}{2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0;\ d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+x^2}dxdy.$$

Тогда

$$\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma=\iint\limits_{S_{xy}}\sqrt{1+x^2}dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x}dy=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}xdx=13.$$

Ответ: $\sigma=13$ (кв. ед.).

Задача 6.3. Вычислить площадь части поверхности $2z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$.

Решение. Площадь поверхности вычисляется по формуле $\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma$. Здесь $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x, \dfrac{\partial z}{\partial y}=y$; $d\sigma=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=$ $=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$

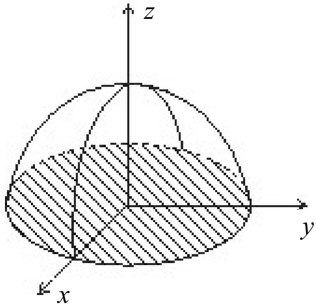
Так как проекция (σ) на плоскость xOy является кругом, то двойной интеграл, будет вычисляться в полярных координатах. Поэтому

$$\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma=\iint\limits_{S_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\iint\limits_{S_{xy}}\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\begin{vmatrix}0\le\varphi\le2\pi\\ 0\le\rho\le1\end{vmatrix}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8}-1\right).$$

Ответ: $\sigma=\dfrac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$ (кв. ед.).

Задача 6.4. Вычислить массу полусферы $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна $\gamma(x,y,z)=x^2y^2$.



Решение. Масса поверхности вычисляется по формуле $m=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y,z)d\sigma$.

Найдем $d\sigma$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad d\sigma=\frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

$$m=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y,z)d\sigma=2\iint\limits_{S_{xy}}\frac{x^2y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy.$$

Так как проекция (σ) на плоскость xOy является кругом, то перейдем к полярным координатам.

$$m=2\iint\limits_{S_{xy}}\frac{\rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho d\varphi=2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2 2\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^2\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(-16\sqrt{4-\rho^2}+\frac{8}{3}\left(\sqrt{4-\rho^2}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\sqrt{4-\rho^2}\right)^5\right)\Bigg|_0^2=\frac{128\pi}{15}.$$

Ответ: $m=\dfrac{128\pi}{15}$ (ед. массы).

Задача 6.5. Вычислить массу цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=H$, если в каждой ее точке плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до начала координат.

Решение. По условию задачи функция плотности $\gamma(x,y,z)=$ $=\dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$, где k – коэффициент пропорциональности. Значит искомая масса будет равна

$$m=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{k}{x^2+y^2+z^2}d\sigma.$$

Для удобства вычисления поверхностного интеграла спроектируем поверхность σ на плоскость zOy, тогда S_{zy} – прямоугольник.

Из уравнения поверхности σ: $x=\sqrt{R^2-y^2}$, тогда

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=0;$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}dydz=\frac{Rdydz}{\sqrt{R^2-y^2}}.$$

Учитывая четность подынтегральной функции $\gamma(x,y,z)$ и по соображениям симметрии, получим

$$m=2\cdot\iint\limits_{S_{zy}}\frac{k}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=2Rk\int\limits_0^H\frac{dz}{R^2+z^2}\int\limits_{-R}^{R}\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}=$$

$$=2k\operatorname{arctg}\frac{z}{R}\bigg|_0^H\arcsin\frac{y}{R}\bigg|_{-R}^{R}=2k\operatorname{arctg}\frac{H}{R}2\arcsin 1=2\pi k\operatorname{arctg}\frac{H}{R}.$$

Ответ: $m=2\pi k\operatorname{arctg}\dfrac{H}{R}$ (ед. массы).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.6. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \left(2 + y - 7x + 9z\right) d\sigma,$$

где σ – часть плоскости $2x - y - 2z + 2 = 0$, отсеченная координатными плоскостями.

Ответ: $I = 12.$

Задача 6.7. Вычислить площадь части плоскости $x + y + z = 4$, которая лежит в первом октанте и ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 4.$

Ответ: $\sigma = \sqrt{3}\pi$ (кв. ед.).

Задача 6.8. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, d\sigma,$$

где σ – полусфера $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$

Ответ: $27\pi.$

Задача 6.9. Найти массу поверхности куба $0 \le x \le 1;$ $0 \le y \le 1;$ $0 \le z \le 1,$ если поверхностная плотность в каждой ее точке равна $\gamma\left(x, y, z\right) = xyz.$

Ответ: $m = \dfrac{3}{4}$ (ед. массы).

Задача 6.10*. Найти притяжение, испытываемое центром основания со стороной боковой поверхности прямого кругового цилиндра высотой H и радиусом основания R.

Примечание. Систему координат выбрать так, что начало координат совпадает с центром основания, а ось Oz – с осью цилиндра. Уравнение цилиндрической поверхности в этом случае $x^2+y^2=R^2$, а точка, которая испытывает искомое притяжение – это начало координат.

Если сила притяжения имеет проекции на координатные оси $\overline{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$, то по соображениям симметрии, очевидно $F_x=F_y=0.$ Тогда, учитывая однородность поверхности $\left(\gamma\left(x,y,z\right)=\text{const}\right)$, вычислить

$$F_z=\gamma\cdot\iint\limits_{(\sigma)}\frac{zd\sigma}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

При вычислении интеграла можно использовать решение задачи 6.5.

Ответ: $\overline{F}=\left(0;0;2\pi\gamma\left(1-\dfrac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}\right)\right).$

Задача 6.11*. Определить потенциал боковой поверхности однородного кругового конуса, высота которого H и радиус основания R, на его вершину.

Примечание. Если вершину конуса расположить в начале координат, а ось симметрии – ось Oz, то уравнение конической поверхности $z=\dfrac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, а потенциал конической поверхности на его вершину – начало координат – определяется поверхностным интегралом $W=\iint\limits_{(\sigma)}\dfrac{\gamma d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Ответ: $W=2\pi R\gamma.$

Практическое задание № 7

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПО ФИГУРЕ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Задачи для решения в аудитории

Задача 7.1. Найти статический момент относительно оси Ox верхней половины окружности $x^2+y^2=a^2$, линейная плотность которой в каждой точке равна ординате этой точки.

Решение. Статический момент материальной плоской дуги относительно оси Ox вычисляется по формуле $M_x=\int\limits_L y\gamma(x,y)\,dl.$ В нашей задаче $\gamma(x,y)=y$, $dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$, если кривая задана параметрически. Параметрические уравнения окружности имеют вид: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. Тогда $x'=-a\sin t$, $y'=a\cos t$ и $dl=a\,dt$.

$$M_x=\int\limits_L y\gamma(x,y)\,dl=\int\limits_L y^2dl=\int\limits_0^{\pi}a^2\sin^2 t\cdot a\,dt=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{\pi a^3}{2}.$$

Ответ: $M_x=\dfrac{\pi a^3}{2}.$

Задача 7.2. Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+2x$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x,y)=xy.$

Решение. Формулы для расчета координат центра масс плоской материальной пластины с плотностью $\gamma(x,y)$ имеют вид

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_S x\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_S \gamma(x,y)\,dxdy},\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_S y\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_S \gamma(x,y)\,dxdy}.$$

Вычислим последовательно эти интегралы.

$$m = \iint\limits_S \gamma(x,y)\,dxdy = \left|\gamma(x,y) = xy\right| = \iint\limits_S xydxdy = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{-x^2+2x} ydy =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\left(-x^2+2x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(x^5 - 4x^4 + 4x^3\right)dx = \frac{8}{15};$$

$$M_y = \iint\limits_S x\gamma(x,y)\,dxdy = \iint\limits_S x^2 ydxdy = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{-x^2+2x} ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2\left(-x^2+2x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(x^6 - 4x^5 + 4x^4\right)dx = \frac{64}{105};$$

$$M_x = \iint\limits_S y\gamma(x,y)\,dxdy = \iint\limits_S xy^2 dxdy = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{-x^2+2x} y^2 dy =$$

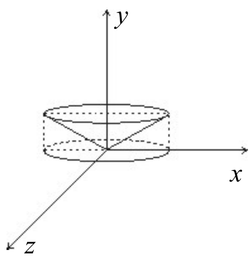
$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^2 x\left(-x^2+2x\right)^3 dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \left(8x^4 - 12x^5 + 6x^6 - x^7\right)dx = \frac{32}{105}.$$

Тогда

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{64\cdot 15}{105\cdot 8} = \frac{8}{7};\quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{32\cdot 15}{105\cdot 8} = \frac{4}{7}.$$

Ответ: $\left(\frac{8}{7};\frac{4}{7}\right)$.

Задача 7.3. Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородного тела, ограниченного поверхностями $y = 4\sqrt{x^2+z^2}$, $y = 2$.



Решение. Момент инерции материального тела V относительно оси Oy вычисляется по формуле

$$I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) \cdot \gamma\left(x, y, z\right) dxdydz.$$

Так как тело однородное, то $\gamma\left(x, y, z\right) = \text{const} = k,\ k > 0,$ и $I_y = k\iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) dxdydz.$ Для вычисления интеграла используем цилиндрическую систему координат: $x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,\ y = y,$ равнение конуса: $y = 4\rho$ и

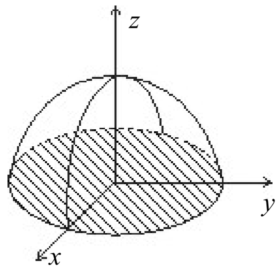
$$I_y = k\iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) dxdydz = \left| \begin{array}{c} dxdydz = \rho d\varphi d\rho dy \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le \dfrac{1}{2}, \\ 4\rho \le y \le 2, x^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right| =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \rho^3 d\rho \int\limits_{4\rho}^{2} dy = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \rho^3 (2 - 4\rho) d\rho = 4\pi k\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{2\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi k}{80}.$$

Ответ: $I_y = \dfrac{\pi k}{80}.$

Задача 7.4. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной полусферы $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Решение. Так как поверхность однородная, то плотность $\gamma\left(x, y, z\right) = \text{const} = k,\ k > 0.$ Момент инерции однородной поверхности относительно оси Oz вычисляется по формуле $I_z = k\iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + y^2\right) d\sigma.$ Найдем



$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Тогда

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2-y^2}+\frac{y^2}{9-x^2-y^2}}dxdy=\frac{3dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Сведем поверхностный интеграл к двойному, который будем вычислять, используя полярные координаты.

$$I_z=k\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y^2\right)d\sigma=3k\iint\limits_{S_{xy}}\frac{\left(x^2+y^2\right)dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi\\ dxdy=\rho d\varphi d\rho,\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 3\end{array}\right|=3k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{9-\rho^2}}.$$

Отдельно вычислим внутренний интеграл с помощью подстановки $\sqrt{9-\rho^2}=t$:

$$\int\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{9-\rho^2}}=\left|\begin{array}{l}9-\rho^2=t^2\\ \rho d\rho=-tdt\end{array}\right|=-\int\left(9-t^2\right)dt=-9t+\frac{t^3}{3}.$$

Окончательно

$$I_z=3k\cdot 2\pi\left(-9\sqrt{9-\rho^2}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{9-\rho^2}\right)^3\right)\Bigg|_0^3=108\pi k.$$

Ответ: $I_z=108\pi k.$

Задача 7.5. Вычислить координаты центра масс однородной пластинки, вырезаемой из плоскости $z = x$ плоскостями $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$.

Решение. Так как пластина однородная $\left(\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}\right)$, то координаты центра масс определяется по формулам

$$x_C = \frac{1}{\sigma}\iint\limits_{(\sigma)} x d\sigma,\ y_C = \frac{1}{\sigma}\iint\limits_{(\sigma)} y d\sigma,\ z_C = \frac{1}{\sigma}\iint\limits_{(\sigma)} z d\sigma.$$

Определим площадь σ указанной части плоскости $z = x$. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$ тогда

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вычислим координаты центра масс

$$x_C = \frac{1}{\sigma}\iint\limits_{(\sigma)} x d\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{1-x} \sqrt{2} dy = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$y_C = \frac{1}{\sigma}\iint\limits_{(\sigma)} y d\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \sqrt{2} y dy = \int\limits_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{1}{3};$$

$$z_C = \frac{1}{\sigma}\iint\limits_{(\sigma)} z d\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{1-x} \sqrt{2} dy = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $C\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.6. Вычислить момент инерции относительно оси Ox первой арки циклоиды $x = a\left(t - \sin t\right)$, $y = a\left(1 - \cos t\right)$, если ее линейная плотность во всех точках постоянна.

Ответ: $I_x = \dfrac{256ka^3}{15}$.

Задача 7.7. Найти координаты центра масс первого полувитка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, считая плотность постоянной.

Ответ: $C\left(0; \dfrac{2a}{\pi}; \dfrac{b\pi}{2}\right)$.

Задача 7.8. Пластина имеет форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a$, $OA = b$, причем плотность ее в любой точке равна расстоянию точки от катета OA. Найти статические моменты пластины относительно катетов OA и OB.

Ответ: $M_x = \dfrac{a^2b^2}{24}$, $M_y = \dfrac{ba^3}{12}$.

Задача 7.9. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x + 4$ и $\mathrm{y}^2 = -2x + 4$.

Ответ: $C\left(\dfrac{2}{5}; 0\right)$.

Задача 7.10. Найти момент инерции кругового цилиндра, высота которого h и радиус основания a, относительно оси, служащей диаметром основания цилиндра.

Ответ: $I_x = \dfrac{\pi a^2 h}{12}\left(3a^2 + 4h^2\right)$.

Задача 7.11. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Ответ: $C\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right).$

Задача 7.12. Найти статический момент относительно плоскости xOy конической поверхности $z^2=x^2+y^2,\ 0\le z\le 1,$ если ее плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от оси конуса.

Ответ: $M_{xy}=\frac{3\sqrt{2}\pi k}{8},$ где k – коэффициент пропорциональности.

Задача 7.13. Найти координаты центра масс части плоскости $x+3y+z=3,$ отсеченной координатными плоскостями, если ее поверхностная плотность равна сумме координат точки.

Ответ: $C\left(\frac{15}{14};\frac{2}{7};\frac{15}{14}\right).$

Задача 7.14*. Определить центр тяжести плиты, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке плотность пропорциональна расстоянию до ее гипотенузы. Найти момент инерции этой плиты относительно ее гипотенузы.

Примечание. Выбрать систему координат так, чтобы гипотенуза треугольника располагалась на оси $Ox,$ а вершина прямого угла на оси $Oy.$

Ответ: $x_c=0,\ y_c=\frac{a}{2};\ I_x=\frac{ka^5}{10}.$

Задача 7.15*. Вертикальная стенка высотой H и длиной l с прямоугольным поперечным сечением подвергается с одной стороны по всей высоте давления воды. Какой толщины h нужно сделать стенку, чтобы под давлением воды она не опрокинулась?

Примечание. Для равновесия достаточно, чтобы моменты сил внешнего нижнего ребра были равны.

Ответ: $h \geq H\sqrt{\dfrac{\rho}{3q}}$, где ρ – плотность воды.

Задача 7.16*. Определить радиус инерции относительно оси однородной колоны, имеющей форму кругового цилиндра, высота которого 8 м, а радиус основания равен 2 м.

Примечание. Радиус инерции тела относительно оси Oz равен $r_z = \sqrt{\dfrac{I_z}{m}}$, где I_z – момент инерции тела относительно оси Oz; m – масса тела. Выбрать систему координат так, чтобы ось колоны совпадала с осью Oz, тогда уравнение цилиндра будет $x^2 + y^2 = 4$; сверху и снизу тело ограничено плоскостями: $z = 8$; $z = 0$.

Ответ: $r_z = \sqrt{2}$.

Задача 7.17*. Вычислить статический момент относительно плоскости xOz однородного шарового сектора C, образующая которого наклонена к оси Oy под углом 45°.

Ответ: $M_{xz} = \dfrac{\pi}{8}\gamma R^4$, где γ – постоянная плотность сектора.

Задача 7.18*. Определить координаты центра масс неоднородного бруса ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2 = 2y$ и плоскостями $y + z = 1$, $2y + z = 2$, если плотность в каждой его точке численно равна ординате этой точки.

Ответ: $m = \dfrac{8\sqrt{2}}{35}$; $C\left(0; \dfrac{35}{63}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Задача 7.19*. Доказать, что момент инерции однородной колонны относительно ее оси, имеющей форму прямого кругового цилиндра, равен произведению массы колонны на полусумму квадратов ее радиусов.

Задача 7.20*. Найти координаты центра масс дуги винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le \pi,$ если плотность в каждой точке пропорциональна ее аппликате.

Ответ: $C\left(-\frac{4a}{\pi^2}; \frac{2a}{\pi}; \frac{2}{3}b\pi\right).$

Задача 7.21*. Найти момент инерции дуги AB, где $A(0;a)$, $B(a;0)$, астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ относительно оси Oy, если плотность в каждой точке пропорциональна абсциссе точки.

Ответ: $I_y = \frac{3ka^4}{8}.$

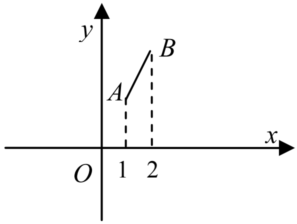
Задача 7.22*. Найти координаты центра масс однородной воронки, имеющей форму конической поверхности, высота и радиус основания которой соответственно равны h и R.

Примечание. Если вершину конуса расположить в начале координат, а ось симметрии – ось Oz, то уравнение конической поверхности имеет вид $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$. Так как воронка однородная и из соображений симметрии $x_C = y_C = 0$.

Ответ: $C\left(0; 0; \frac{2}{3}H\right).$

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

Задание 1. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, где L – отрезок прямой $y=2x$, заключенный между точками $A(1;2)$ и $B(2;4)$.



Решение. Для отрезка AB: $y=2x$, $1 \le x \le 2$. Так как линия задана явно, воспользуемся формулой (1.1).

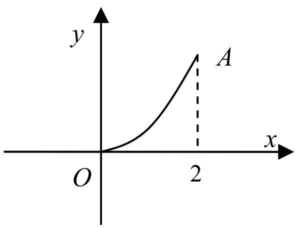
Тогда $y'=2$ и

$$dl=\sqrt{1+2^2}\,dx=\sqrt{5}\,dx.$$

$$\int\limits_L \frac{dl}{x+y}=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{5}dx}{x+2x}=\sqrt{5}\int\limits_1^2 \frac{dx}{3x}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ln|x|\Big|_1^2=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\ln 2-\ln 1\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}\ln 2.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{3}\ln 2.$

Задание 2. Вычислить $\int\limits_L x\,dl$, где L – дуга параболы $y=\frac{x^2}{2}$, заключенной между точками $O(0;0)$ и $A(2;2)$.



Решение. Для дуги OA: $y=\frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 2$. Так как линия задана явно, воспользуемся формулой (1.1).

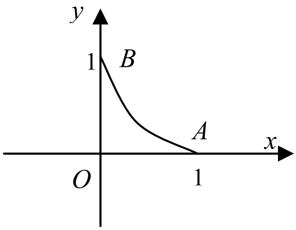
Тогда $y'=x$ и $dl=\sqrt{1+x^2}\,dx$.

$$\int\limits_L x\,dl=\int\limits_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} \Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{5^3} - 1\right) = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})dl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x = \cos^3 t,\ \ y = \sin^3 t$ между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$.



Решение. Для указанной части астроиды, заданной параметрически, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Воспользуемся формулой (1.2). Тогда $x' = -3\cos^2 t \cdot \sin t,\ \ y' = 3\sin^2 t \cdot \cos t$ и

$$dl = \sqrt{(-\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cdot \cos t)^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9\sin^4 t \cdot \cos^2 t}\, dt = 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt = 3\cos t \sin t\, dt.$$

Тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sqrt[3]{\cos^3 t} - 3\sqrt[3]{\sin^3 t}\right) 3\cos t \cdot \sin t\, dt =$$

$$= 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2 t \cdot \sin t - 3\sin^2 t \cdot \cos t\right) dt =$$

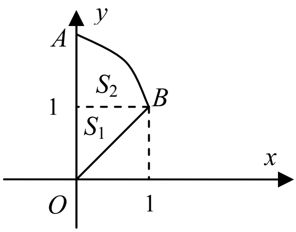
$$= 3\left(-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, d(\cos t) - 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, d(\sin t) \right) = -4\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -4\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) - 3\left(\sin^3\frac{\pi}{2} - \sin^3 0\right) =$$

$$= -4(0-1) - 3(1-0) = 4 - 3 = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 4. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy$ по заданной области $S: y = 2 - x^2,\ \ y = x,\ \ x \ge 0.$



Решение. Область интегрирования S представляет собой криволинейный треугольник OAB. Вершины треугольника определены точками $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(1;1)$.

Рассмотрим область интегрирования S в направлении оси Oy: линия входа OB – $y = x$, линия выхода AB – $y = 2 - x^2$, $x \in [0;1]$. Таким образом,

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} f(x,y)\,dy.$$

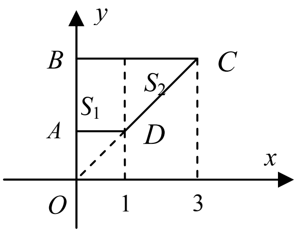
Рассмотрим область интегрирования S в направлении оси Ox. Разобьем ее на сумму двух областей S_1 и S_2. Для области S_1: $0 \le x \le y,\ \ y \in [0;1]$. Для области S_2: $0 \le x \le \sqrt{2-y},\ \ y \in [1;2]$. Таким образом,

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} f(x,y)\,dy$ или $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx.$

Задание 5. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$ по заданной области S: $x \ge 0$, $y \ge 1$, $y \le 3$, $y = x$.



Решение. Область интегрирования S представляет собой четырехугольник *ABCB*. Вершины определены точками $A(0;1)$, $B(0;3)$, $C(3;3)$, $D(1;1)$.

Рассмотрим область интегрирования S в направлении оси Oy. Разобьем ее на сумму двух областей S_1 и S_2. Для области S_1: $y = 1$ – линия входа AD, $y = 3$ – линия выхода BC, $x \in [0;1]$. Для области S_2: $y = x$ – линия входа DC, $y = 3$ – линия выхода BC, $x \in [1;3]$. Таким образом,

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^3 f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)dy.$$

Рассмотрим область интегрирования S в направлении оси Ox: $x = 0$ – линия входа AB, $x = y$ – линия выхода DC, $y \in [1;3]$. Таким образом,

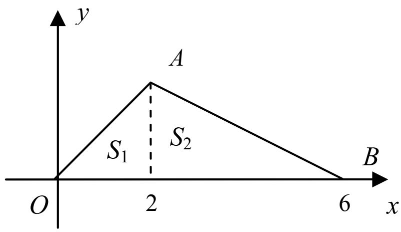
$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^3 f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)dy$ или $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx.$

Задание 6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{6-2y} f(x,y)dx.$

Решение. Восстановим область интегрирования S: линия входа – $x = y$, линия выхода – $x = 6 - 2y$ или $x + 2y = 6$. Проекция области S

на ось Oy – отрезок $\left[0;2\right]$. Область S имеет вид треугольника OAB с вершинами $O(0;0)$, $A(2;2)$, $B(6;0)$.



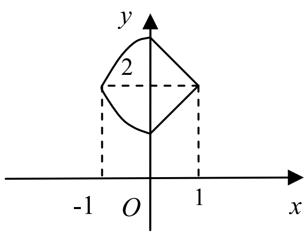
Выполним внешнее интегрирование по x, а внутреннее по y. Рассмотрим область интегрирования в направлении оси Oy. Разобьем ее на сумму двух областей S_1 и S_2. Для области S_1: $0 \le y \le x,\ \ x \in \left[0;2\right]$. Для области S_2: $0 \le y \le 3 - \dfrac{x}{2},\ \ x \in \left[2;6\right]$. Тогда

$$\int_0^2 dy \int_y^{6-2y} f\left(x,y\right)dx = \int_0^2 dx \int_0^x f\left(x,y\right)dy + \int_2^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} f\left(x,y\right)dy.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^x f\left(x,y\right)dy + \int_2^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} f\left(x,y\right)dy.$

Задание 7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле: $\displaystyle\int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+1}^{-x^2+3} f\left(x,y\right)dy + \int_0^1 dx \int_{x+1}^{-x+3} f\left(x,y\right)dy.$

Решение. Восстановим область интегрирования S, которая состоит из суммы двух областей S_1 и S_2. Линия входа для S_1 – $y = x^2 + 1$, линия выхода – $y = -x^2 + 3$. Проекция области S_1 на ось Ox – отрезок $\left[-1;0\right]$. Линия входа для S_2 – $y = x + 1$, линия выхода – $y = -x + 3$. Проекция области S_2 на ось Oy – отрезок $\left[0;1\right]$.

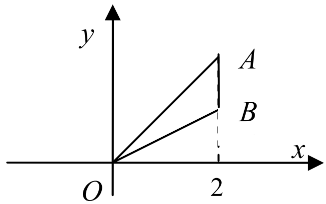


Выполним внешнее интегрирование по y, а внутреннее по x. Рассмотрим область интегрирования в направлении оси Ox. Разобьем ее на сумму двух областей S_1 и S_2. Для области S_1: $x=-\sqrt{y-1}$ – линия входа, $x=y-1$ – линия выхода, $y\in[1;2]$. Для области S_2: $x=-\sqrt{3-y}$ – линия входа, $x=3-y$ – линия выхода, $y\in[2;3]$. Тогда

$$\int_{-1}^{0}dx\int_{x^2+1}^{-x^2+3}f(x,y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x+1}^{-x+3}f(x,y)dy=$$
$$=\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{y-1}}^{y-1}f(x,y)dx+\int_{2}^{3}dy\int_{-\sqrt{3-y}}^{3-y}f(x,y)dx.$$

Ответ: $\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{y-1}}^{y-1}f(x,y)dx+\int_{2}^{3}dy\int_{-\sqrt{3-y}}^{3-y}f(x,y)dx.$

Задание 8. Вычислить ДИ $\iint\limits_S (x-y)dxdy$ по области S, ограниченной линиями $y=x$, $y=\dfrac{x}{2}$, $x=2$.



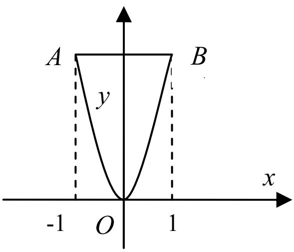
Решение. Построим область интегрирования S – треугольник OAB. Область S является правильной в направлении оси Oy: $y=\dfrac{x}{2}$ – линия входа, $y=x$ – линия выхода. Проекция S на ось Ox – отрезок $[0;2]$. Тогда

$$\iint\limits_S (x-y)dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x}(x-y)dy=\int_0^2\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{x}dx=$$
$$=\int_0^2\left(\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{8}\right)\right)dx=\int_0^2\left(x^2-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{8}\right)dx=$$

$$=\int_0^2 \frac{x^2}{8}\,dx = \left.\frac{x^3}{24}\right|_0^2 = \frac{2^3}{24} - \frac{0^3}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задание 9. Вычислить ДИ $\iint\limits_S (x+1)y\,dxdy$ по области S, ограниченной линиями $y = 3x^2$, $y = 3$.



Решение. Построим область интегрирования S.

Область S является правильной в направлении оси Oy: $y = 3x^2$ – линия входа, $y = 3$ – линия выхода, проекция S на ось – отрезок $[-1;1]$. Тогда

$$\iint\limits_S (x+1)\,ydxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{3x^2}^{3} (x+1)ydy = \int_{-1}^{1} (x+1)\left.\frac{y^2}{2}\right|_{3x^2}^{3} dx =$$

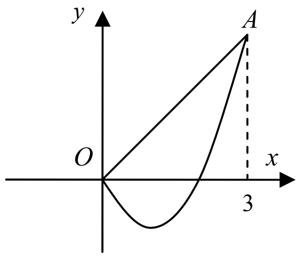
$$= \int_{-1}^{1} (x+1)\left(\frac{3^2}{2} - \frac{9x^4}{2}\right)dx = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} (x+1)(1-x^4)dx = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} (x - x^5 + 1 - x^4)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} + x - \frac{x^5}{5}\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{9}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 1 + \frac{1}{5}\right)\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{2}\left(2 - \frac{2}{5}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{8}{5} = \frac{36}{5} = 7{,}2.$$

Ответ: 7,2.

Задание 10. Найти площадь плоской области, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = x$.



Решение. Построим область интегрирования S. Точки пересечения линий найдем из решения системы

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x. \end{cases}$$

Решим уравнение

$$x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0.$$

Откуда $x = 0$ или $x = 3$.

Точки пересечения: $O(0;0)$ и $A(3;3)$.

Область S является правильной в направлении оси Oy: $x^2 - 2x \le y \le x,\ \ x \in [0;3]$.

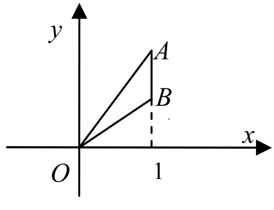
$$S = \iint\limits_S dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy = \int\limits_0^3 y\Big|_{x^2-2x}^{x} dx = \int\limits_0^3 (x - (x^2 - 2x))dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (x - x^2 + 2x)dx = \int\limits_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5 (кв. ед).

Задание 11. Вычислить массу пластины, ограниченной линиями $y = x,\ y = 2x,\ x = 1,$ если плотность в каждой ее точке равна произведению координат.

Решение. По условию плотность $\gamma(x, y) = = xy,$ тогда масса плоской пластины вычисляется по формуле $m = \iint\limits_S \gamma(x, y)dxdy.$



Построим область интегрирования S, ограниченную кубической указанными линиями – треугольник OAB.

Область интегрирования S является правильной в направлении оси Ox.

Линия входа – $y = x$, линия выхода – $y = 2x$. Проекцией области S на ось Ox является отрезок $[0;1]$.

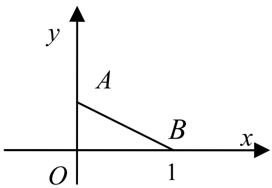
Тогда

$$m = \iint\limits_S \gamma(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} xydy = \int\limits_0^1 \left(x\frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{2x} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x\frac{4x^2}{2} - x\frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Ответ: $\frac{3}{8}$ (ед. массы).

Задание 12. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - x^2 - y^2$, $x + 2y = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.



Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело: $x + 2y = 1$ – плоскость параллельная оси Oz; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – координатные плоскости; $z = 2 - x^2 - y^2$ есть эллиптический параболоид.

Из геометрического смысла двойного интеграла следует, что $v = \iint\limits_S \left(2 - x^2 - y^2\right) dxdy$, где область S – проекция тела на плоскость xOy.

Эта область является правильной в направлении оси Oy: $y = 0$ – линия входа, $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ – линия выхода, $x \in [0;1]$.

Тогда

$$v = \iint\limits_S \left(2 - x^2 - y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} \left(2 - x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}(1-x)} dx = \int\limits_0^1 \left(2 \cdot \frac{1}{2}(1-x) - x^2 \cdot \frac{1}{2}(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3 \cdot 8} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{24} + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} \right) dx =$$

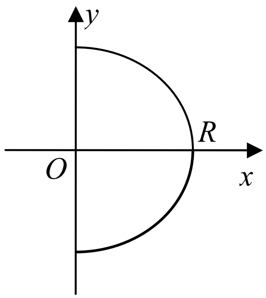
$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{23}{24} - \frac{7}{8}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{24}x^3 \right) dx = \left(\frac{23}{24}x - \frac{7}{16}x^2 - \frac{5}{24}x^3 + \frac{13}{96}x^4 \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{23}{24} - \frac{7}{16} - \frac{5}{24} + \frac{13}{96} = \frac{43}{96}.$$

Ответ: $\frac{43}{96}$ (куб. ед).

Задание 13. Вычислить $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}} dy$ с помощью перехода к полярным координатам.

Решение. Область интегрирования S ограничена частью окружности с центром в точке $O(0;0)$, радиусом R, расположенной в I и IV четвертях. Уравнение окружности с центром в начале координат



радиусом R имеет вид: $\rho = R$. Так как S расположена в I и IV четвертях, то $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Область является правильной относительно полярной системы координат.

Тогда

$$\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}\, dy =$$

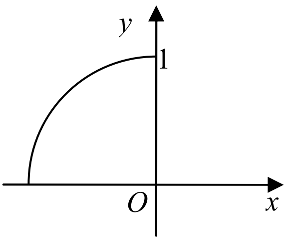
$$= \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \frac{2}{\rho\cos^2\rho}\cdot\rho d\rho = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \frac{d\rho}{\cos^2\rho} =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tg\rho\Big|_0^R\, d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tgR\, d\varphi = 2tgR\cdot\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2tgR\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi tgR.$$

Ответ: $2\pi tgR.$

Задание 14. Вычислить $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$ с помощью перехода к полярным координатам.

Решение. Область интегрирования S ограничена частью окружности с центром в точке $O(0;0)$, радиусом 1, расположенной во II четверти. Уравнение окружности с центром в начале координат радиуса 1 имеет вид: $\rho = 1$. Так как S расположена во II четверти, то $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$. Область является правильной относительно полярной системы координат.



Тогда

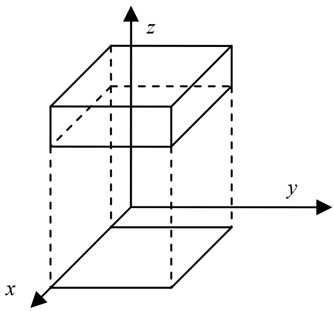
$$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{1}{1+\rho}\cdot\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{1+\rho}\right) d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\rho - \ln|1+\rho|\right)\Big|_0^1\, d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1-\ln 2\right) d\varphi =$$

$$=\left(1-\ln 2\right)\cdot\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\left(1-\ln 2\right)\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\left(1-\ln 2\right)\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$.

Задание 15. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2yz\,dxdydz$, если тело V ограничено плоскостями $x=1$, $x=4$, $y=0$, $y=3$, $z=3$, $z=4$.



Решение. Построим тело. Проекцию тела на плоскость xOy обозначим S_{xy}.

Тогда

$$\iiint\limits_V x^2yz\,dxdydz=\iint\limits_{S_{xy}}dxdy\int\limits_3^4 x^2yz\,dz=$$

$$=\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^3 dy\int\limits_3^4 x^2yzdz=\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^3\frac{x^2yz^2}{2}\Bigg|_3^4 dy=$$

$$=\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^3\frac{x^2y(4^2-3^2)}{2}dy=\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^3\frac{x^2y}{2}\cdot(16-9)dy=\frac{7}{2}\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^3 x^2ydy=$$

$$=\frac{7}{2}\int\limits_1^4\frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^3 dx=\frac{7}{2}\int\limits_1^4\frac{x^2(9-0)}{2}dx=\frac{63}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4=\frac{21}{4}(4^3-1)=\frac{1323}{4}.$$

Ответ: $330{,}75$.

Задание 16. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $z=x^2$, плоскостями $x=4$, $y=2x$, координатными плоскостями $(y\geq 0, z\geq 0)$.

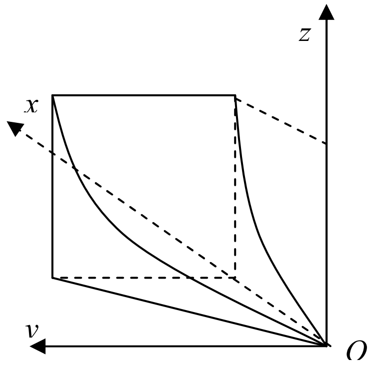
Решение. Построим тело: образующая цилиндра $z=x^2$ параллельна оси Oy, плоскости $x=4$ и $y=2x$ параллельны оси Oz. Проекцию тела на плоскость xOy обозначим S_{xy}.

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_{S_{xy}} dxdy\int\limits_0^{x^2} dz=$$

$$=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{2x} dy\int\limits_0^{x^2} dz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{2x} z\Big|_0^{x^2} dy=$$

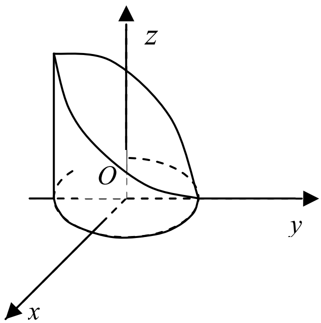
$$\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{2x} x^2 dy=\int\limits_0^4 x^2 y\Big|_0^{2x} dx=$$

$$\int\limits_0^4 2x^3 dx=2\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4=\frac{1}{2}\cdot 4^4=128.$$



Ответ: 128 (куб. ед.).

Задание 17. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=4$, плоскостью $y+z=2$, координатной плоскостью $z=0$.



Решение. Построим тело: образующая цилиндра $x^2+y^2=4$ параллельна оси Oz, плоскость $y+z=2$ параллельна оси Ox. Проекцию тела на плоскость xOy обозначим S_{xy}. Так как она представляет собой окружность с радиусом 2 м центром в начале координат, то при вычислении ДИ по S_{xy} можно перейти к полярным координатам.

$$v=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_{S_{xy}} dxdy\int\limits_0^{2-y} dz=\iint\limits_{S_{xy}} z\Big|_0^{2-y} dxdy=\iint\limits_{S_{xy}}(2-y)dxdy=$$

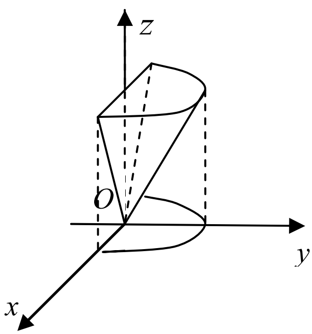
$$=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{vmatrix}=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2(2-\rho\sin\varphi)\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2(2\rho-\rho^2\sin\varphi)d\rho=$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \right) \Bigg|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(4 - \frac{8}{3} \sin\varphi \right) d\varphi = \left(4\varphi + \frac{8}{3} \cos\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 8\pi + \frac{8}{3}(1-1) = 8\pi.$$

Ответ: 8π (куб. ед.).

Задание 18. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 1$ $(y \geq 0)$, если его плотность в любой точке численно равна кубу расстояния от этой точки до плоскости *xOy*.



Решение. По условию плотность $\gamma(x, y, z) = z^3$, тогда масса тела вычисляется по формуле $m = \iiint\limits_V z^3 dxdydz$. Тело представляет собой часть конуса, отсеченную координатной плоскостью $y = 0$ и плоскостью $z = 1$, расположено в I и II октантах.

Линией пересечения поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскости $z = 1$ является окружность с центром в точке $O'(0;0;1)$, лежащая в плоскости $z = 1$ и проецирующаяся на плоскость *xOy* в окружность $x^2 + y^2 = 1$. С учетом условия $y \geq 0$, будем рассматривать полуокружность, расположенную в I и II четвертях плоскости *xOy*.

Вычислим тройной интеграл, используя для вычисления цилиндрическую систему координат. В цилиндрических координатах уравнение конуса $z = \rho$.

Тогда

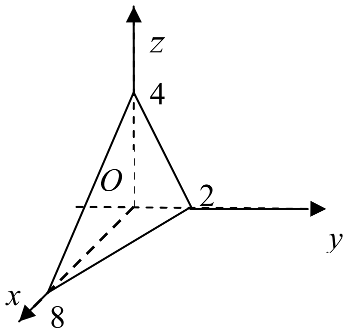
$$m = \iiint\limits_V z^3 dxdydz = \left| \begin{array}{c} dxdydz = \rho d\varphi d\rho dz \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ \rho \le z \le 1 \end{array} \right| = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho}^1 z^3 \rho dz =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho \frac{z^4}{4} \right) \Bigg|_{\rho}^1 d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \left(\frac{1}{4} - \frac{\rho^4}{4} \right) d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{\rho}{4} - \frac{\rho^5}{4} \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^2}{8} - \frac{\rho^6}{24} \right) \Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) \Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{2}{24} d\varphi = \frac{1}{12} \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}$ (ед. массы).

Задание 19. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} (3x + 8y + 8z) d\sigma$, где (σ) – часть плоскости $x + 4y + 2z = 8$, расположенная в первом октанте.



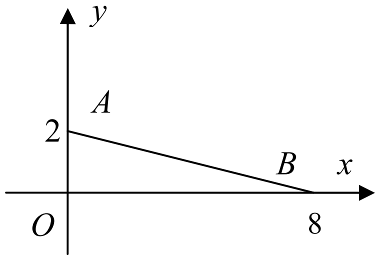
Решение. Преобразуем исходный интеграл к двойному. Выразим z из уравнения плоскости: $z = 4 - \frac{x}{2} - 2y$.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2,$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + (-2)^2} \, dxdy = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 4} \, dxdy = \frac{\sqrt{21}}{2} dxdy.$$

Проекцией (σ) на плоскость xOy является треугольник OAB.



$$\iint\limits_{(\sigma)}(3x+8y+8z)d\sigma=\iint\limits_{S_{xy}}\left(3x+8y+8\left(4-\frac{x}{2}-2y\right)\right)\frac{\sqrt{21}}{2}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{2}\int\limits_0^8 dx\int\limits_0^{2-\frac{x}{4}}(32-x-8y)dy=\frac{\sqrt{21}}{2}\int\limits_0^8(32y-xy-4y^2)\Big|_0^{2-\frac{x}{4}}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{2}\int\limits_0^8\left(32\left(2-\frac{x}{4}\right)-x\left(2-\frac{x}{4}\right)-4\left(2-\frac{x}{4}\right)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{2}\int\limits_0^8\left(64-8x-2x+\frac{x^2}{4}-4\left(4-x+\frac{x^2}{16}\right)\right)dx=\frac{\sqrt{21}}{2}\int\limits_0^8(48-6x)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{2}\left(48x-3x^2\right)\Big|_0^8=\frac{\sqrt{21}}{2}\left(48\cdot 8-3\cdot 8^2\right)=\frac{\sqrt{21}}{2}(384-192)=96\sqrt{21}.$$

Ответ: $96\sqrt{21}$.

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl,$ где L – отрезок прямой $y = 2x - 1,$ заключенный между точками $A(-1;-3)$ и $B(2;3).$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}.$

Задание 2. Вычислить $\int\limits_L \dfrac{x}{y} dl,$ где L – дуга параболы $y^2 = 4x$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(4;4).$

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{3}.$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dl,$ где L – окружность $x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t.$

Ответ: $486\pi.$

Задание 4. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f\left(x, y\right) dxdy$ по заданной области $S:\ y = x,\ \ y = \dfrac{1}{x},\ \ x = 2,\ \ y \geq 0.$

Задание 5. Расставить пределы интегрирования в ДИ $\iint\limits_S f\left(x, y\right) dxdy$ по заданной области $S:\ x \leq 0,\ \ y = 1,\ \ y = 4,\ \ y = -x.$

Задание 6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{x^2-3}^{\frac{2}{x}} f\left(x, y\right) dy.$

Задание 7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{-x^2+4} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{-x+4} f(x,y)\,dy.$

Задание 8. Вычислить ДИ $\iint\limits_{S} x(y-x)\,dxdy$ по области S, ограниченной линиями $y=x,\;\; y=5x,\;\; x=3.$

Ответ: 162.

Задание 9. Вычислить ДИ $\iint\limits_{S} x\,dxdy$ по области S, ограниченной линиями $y=x^2,\;\; x=0,\;\; x+y=2.$

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Задание 10. Найти площадь плоской области, ограниченной линиями $y^2=4+x,\;\; x+3y=0.$

Ответ: $20\frac{5}{6}$ (кв. ед).

Задание 11. Вычислить массу пластины, ограниченной линиями $y=x^2,\;\; y=x+2,$ если плотность в каждой ее точке равна сумме координат.

Ответ: $9\frac{9}{20}$ (ед. массы).

Задание 12. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=2x^2+y^2,\;\; x+y=4,\;\; x\ge 0,\;\; y\ge 0,\;\; z\ge 0.$

Ответ: 64 (куб. ед).

Задание 13. Вычислить $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy$ с помощью перехода к полярным координатам.

Ответ: 0.

Задание 14. Вычислить $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dy$ с помощью перехода к полярным координатам.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Задание 15. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (x+y+4z^2)\, dxdydz$, если тело V ограничено плоскостями $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=-1$, $z=1$.

Ответ: $18\frac{2}{3}$.

Задание 16. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $z=\frac{y^2}{2}$, плоскостью $2x+3y-12=0$, координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Ответ: 16 (куб. ед.).

Задание 17. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=4$, эллиптическим параболоидом $z=x^2+y^2$, координатной плоскостью $z=0$.

Ответ: 8π (куб. ед.).

Задание 18. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностью $x^2=2(y^2+z^2)$ и плоскостью $x=4$, если его плотность в любой точке численно равна расстоянию от этой точки до плоскости *yOz*.

Ответ: 32π (ед. массы).

Задание 19. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} (6x+4y+3z)d\sigma$, где (σ) – часть плоскости $x+2y+3z=6$, расположенная в первом октанте.

Ответ: $54\sqrt{14}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва: Наука, 1985.

2. Герасимович, А. И. Математический анализ: в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак.– Москва: Выш. школа, 1990.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: Высшая школа, 1986. – Ч. 2.

4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – Москва: Наука, 1977.

5. Жевняк, Р. М. Высшая математика: в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Выш. школа, 1985. – Ч. 3.

6. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / под ред. Б. П. Демидовича. – Москва: Наука, 1978.

7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 ч. / Н. С. Пискунов. – Минск: Наука, 1987. – Ч. 2.

8. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д. Письменный. – Москва, Айрис Пресс, 2004. – Ч. 2.

9. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике: в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Выш. школа, 1994. – Ч. 2.

Учебное издание

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ФИГУРЕ ОТ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»;
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»;
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»;
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»;
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»;
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»;
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»;
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»
и 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Составители:
ГУРИНА Татьяна Николаевна
КАПУСТО Анна Владимировна
ЯБЛОНСКАЯ Людмила Алексеевна

Редактор *В. И. Акуленок*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 06.03.2020. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 4,18. Тираж 100. Заказ 111.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.